

Теорема типа Литтлвуда-Пэли для ортопроекторов на взаимно ортогональные подпространства кусочно-полиномиальных функций и следствие из неё

С. Н. Кудрявцев

Аннотация

В статье доказано утверждение, представляющее собой аналог теоремы Литтлвуда-Пэли для ортопроекторов на взаимно ортогональные подпространства кусочно-полиномиальных функций на кубе I^d . Исходя из него установлена оценка сверху нормы функций в $L_p(I^d)$ через соответствующие нормы проекций на подпространства кусочно-полиномиальных функций нескольких переменных. С помощью этих соотношений получены верхние оценки колмогоровских поперечников классов Бесова (непериодических) функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гельдера.

Ключевые слова: ортопроектор, взаимно ортогональные подпространства, кусочно-полиномиальные функции, теорема Литтлвуда-Пэли, поперечник

Введение

Как известно (см., например, [1], [2] и др. работы), важное значение для вывода порядковых оценок точности приближения в L_p способами, основанными на применении кратных тригонометрических рядов, классов периодических функций нескольких переменных с условиями на смешанные производные (разности) имеет теорема Литтлвуда-Пэли для кратных рядов Фурье и следствия из нее. По поводу теоремы Литтлвуда-Пэли для кратных рядов Фурье см., например, [3, п. 1.5.2], [4] и приведенную там литературу. Для получения соответствующих оценок точности приближения классов (непериодических) функций, заданных на кубе I^d , подчиненных условиям на смешанные разности, полезно иметь аналоги этих результатов для средств приближе-

ния таких классов непериодических функций. С этой целью в работе доказан аналог теоремы Литтлвуда-Пэли для семейств ортопроекторов $\{\mathcal{E}_\kappa^{d,l}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$ (см. п. 2.2.) на взаимно ортогональные подпространства кусочно-полиномиальных функций на кубе I^d , построенных в [5] (см. также ниже п. 1.4.), а именно, показано, что при $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d, 1 < p < \infty$ для любой функции $f \in L_p(I^d)$ выполняются неравенства

$$c_1 \|f\|_{L_p(I^d)} \leq \left(\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \leq c_2 \|f\|_{L_p(I^d)} \quad (1)$$

с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$, зависящими от d, l, p .

Исходя из (1), установлена оценка сверху нормы функции f в $L_p(I^d)$ через соответствующие нормы проекций $\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, на подпространства кусочно-полиномиальных функций, которая имеет вид

$$\|f\|_{L_p(I^d)} \leq c_3 \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^{p^*} \right)^{1/p^*}, \quad (2)$$

(ср. с аналогом для операторов взятия частных сумм ряда Фурье в [2]), где $p^* = \min(2, p)$. В качестве иллюстрации применения с помощью (2) получена оценка сверху колмогоровского n -поперечника в $L_q(I^d)$ множества $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ – единичного шара относительно полунормы, определяющей пространство Бесова функций на кубе I^d , удовлетворяющих смешанным условиям Гельдера (см. п. 3.1.). Эта оценка при некоторых условиях на $d \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}_+^d, 1 \leq \theta \leq \infty, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q < \infty$ такова:

$$d_n(\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d), L_q(I^d)) \leq c_4 n^{-\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathbf{e})} (\log n)^{(\mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathbf{e}) + (1/q - 1/\theta)_+)(c-1)}, \quad (3)$$

где $\mathbf{m}(x) = \min_{j=1,\dots,d} x_j, x \in \mathbb{R}^d, \mathbf{c} = \text{card}\{j = 1, \dots, d : \alpha_j = \mathbf{m}(\alpha)\}, \mathbf{e} = (1, \dots, 1), q = \min(2, \max(p, q))$. Порядковая оценка (3) при $q \geq 2$ точна (см. (3.3.19')). Для сравнения (3) со случаем периодических функций см. [2].

Работа состоит из введения и трех параграфов. В §1 приведены предварительные сведения об ортопроекторах на подпространства кусочно-полиномиальных функций и кратных рядах, рассматриваемых в работе. В п. 2.2. §2 на основании сведений из §1 и п. 2.1. устанавливается справедливость (1) и выводится (2). В §3 с применением (2) доказывается (3) (см. п. 3.3.). Перейдем к точным формулировкам и доказательствам.

§1. Операторы проектирования на подпространства

кусочно-полиномиальных функций

1.1. В этом пункте вводятся обозначения, используемые в настоящей работе.

Для $d \in \mathbb{N}$ через \mathbb{Z}_+^d обозначим множество

$$\mathbb{Z}_+^d = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d : \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\}.$$

Обозначим также при $d \in \mathbb{N}$ для $l \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathbb{Z}_+^d(l)$ множество

$$\mathbb{Z}_+^d(l) = \{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : \lambda_j \leq l_j, j = 1, \dots, d\}.$$

Для $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{P}^{d,l}$ будем обозначать пространство вещественных полиномов, состоящее из всех функций $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)} a_\lambda \cdot x^\lambda, x \in \mathbb{R}^d,$$

где $a_\lambda \in \mathbb{R}, x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$.

При $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$ для области $D \subset \mathbb{R}^d$ через $\mathcal{P}^{d,l}(D)$ обозначим пространство функций f , определенных в D , для каждой из которых существует полином $g \in \mathcal{P}^{d,l}$ такой, что сужение $g|_D = f$.

При $n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$ через l_p^n обозначим пространство \mathbb{R}^n с фиксированной в нем нормой

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p}, & \text{при } p < \infty; \\ \max_{j=1, \dots, n} |x_j|, & \text{при } p = \infty, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначается пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} (\int_D |f(x)|^p dx)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty; \\ \sup \operatorname{vrai}_{x \in D} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Введем еще следующие обозначения.

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ положим $xy = x \cdot y = (x_1 y_1, \dots, x_d y_d)$, а для $x \in \mathbb{R}^d$ и $A \subset \mathbb{R}^d$ определим

$$xA = x \cdot A = \{xy : y \in A\}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^d : x_j \neq 0$, при $j = 1, \dots, d$, положим $x^{-1} = (x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1})$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $x, y \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j.$$

Обозначим через \mathbb{R}_+^d множество $x \in \mathbb{R}^d$, для которых $x_j > 0$ при $j = 1, \dots, d$, и для $a \in \mathbb{R}_+^d, x \in \mathbb{R}^d$ положим $a^x = a_1^{x_1} \dots a_d^{x_d}$.

При $d \in \mathbb{N}$ определим множества

$$\begin{aligned} I^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, d\}, \\ \bar{I}^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}, \\ B^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : -1 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Через \mathbf{e} будем обозначать вектор в \mathbb{R}^d , задаваемый равенством $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$.

Далее, напомним, что для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и вектора $h \in \mathbb{R}^d$ через D_h обозначается множество

$$D_h = \{x \in D : x + th \in D \forall t \in \bar{I}\}.$$

Для функции f , заданной в области $D \subset \mathbb{R}^d$, и вектора $h \in \mathbb{R}^d$ определим в D_h ее разность $\Delta_h f$ с шагом h , полагая

$$(\Delta_h f)(x) = f(x + h) - f(x), x \in D_h,$$

а для $l \in \mathbb{N} : l \geq 2$, в D_{lh} определим l -ую разность $\Delta_h^l f$ функции f с шагом h равенством

$$(\Delta_h^l f)(x) = (\Delta_h(\Delta_h^{l-1} f))(x), x \in D_{lh},$$

положим также $\Delta_h^0 f = f$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $j = 1, \dots, d$ через e_j будем обозначать вектор $e_j = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^d$ через $f(x)$ обозначим множество $f(x) = \{j = 1, \dots, d : x_j \neq 0\}$, а для множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ через χ_J обозначим вектор из \mathbb{R}^d с компонентами

$$(\chi_J)_j = \begin{cases} 1, & \text{для } j \in J; \\ 0, & \text{для } j \in (\{1, \dots, d\} \setminus J). \end{cases}$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^d$ и $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \mathbb{N} : 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq d$, через x^J обозначим вектор $x^J = (x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \in \mathbb{R}^k$, а для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ положим $A^J = \{x^J : x \in A\}$.

В заключение этого пункта введем еще несколько обозначений.

Для банахова пространства X (над \mathbb{R}) обозначим $B(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$.

Для банаховых пространств X, Y через $\mathcal{B}(X, Y)$ обозначим банахово пространство, состоящее из непрерывных линейных операторов $T : X \mapsto Y$, с нормой

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{x \in B(X)} \|Tx\|_Y.$$

Отметим, что если $X = Y$, то $\mathcal{B}(X, Y)$ является банаховой алгеброй. Отметим еще, что при $Y = \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ обозначается также X^* .

1.2. В этом пункте содержатся сведения о кратных рядах, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Для $d \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathbf{m}(y) = \min_{j=1, \dots, d} y_j$$

и для банахова пространства X , вектора $x \in X$ и семейства $\{x_\kappa \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ будем писать $x = \lim_{\mathbf{m}(\kappa) \rightarrow \infty} x_\kappa$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, для которого $\mathbf{m}(\kappa) > n_0$, справедливо неравенство $\|x - x_\kappa\|_X < \epsilon$.

Пусть X – банахово пространство (над \mathbb{R}), $d \in \mathbb{N}$ и $\{x_\kappa \in X : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ – семейство векторов. Тогда под суммой ряда $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} x_\kappa$ будем понимать вектор $x \in X$, для которого выполняется равенство $x = \lim_{\mathbf{m}(k) \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} x_\kappa$.

При $d \in \mathbb{N}$ через Υ^d обозначим множество

$$\Upsilon^d = \{\epsilon \in \mathbb{Z}^d : \epsilon_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, d\}.$$

Имеет место

Лемма 1.2.1

Пусть X – банахово пространство, а вектор $x \in X$ и семейство $\{x_\kappa \in X : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ таковы, что $x = \lim_{\mathbf{m}(\kappa) \rightarrow \infty} x_\kappa$. Тогда для семейства $\{\mathcal{X}_\kappa \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, определяемого равенством

$$\mathcal{X}_\kappa = \sum_{\epsilon \in \Upsilon^d : f(\epsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathbf{e})^\epsilon x_{\kappa - \epsilon}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d,$$

справедливо равенство

$$x = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{X}_\kappa.$$

Лемма является следствием того, что при $k \in \mathbb{Z}_+^d$ выполняется равенство

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \mathcal{X}_\kappa = x_k \text{ (см. [5])}. \quad (1.2.1)$$

Замечание.

Легко заметить, что для любого семейства чисел $\{x_\kappa \in \mathbb{R} : x_\kappa \geq 0, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, если ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} x_\kappa$ сходится, т.е. существует предел $\lim_{m(k) \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} x_\kappa$, то для любой последовательности подмножеств $\{Z_n \subset \mathbb{Z}_+^d, n \in \mathbb{Z}_+\}$, таких, что $\text{card } Z_n < \infty$, $Z_n \subset Z_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\cup_{n \in \mathbb{Z}_+} Z_n = \mathbb{Z}_+^d$, справедливо равенство $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} x_\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in Z_n} x_\kappa$. Отсюда несложно понять, что если для семейства векторов $\{x_\kappa \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ банахова пространства X ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|x_\kappa\|_X$ сходится, то для любой последовательности подмножеств $\{Z_n \subset \mathbb{Z}_+^d, n \in \mathbb{Z}_+\}$, таких, что $\text{card } Z_n < \infty$, $Z_n \subset Z_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\cup_{n \in \mathbb{Z}_+} Z_n = \mathbb{Z}_+^d$, в X соблюдается равенство $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} x_\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in Z_n} x_\kappa$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(x) &= \max_{j=1, \dots, d} x_j, \\ \mathfrak{C}(x) &= \text{card}\{j \in \{1, \dots, d\} : x_j = \mathfrak{M}(x)\}, \\ \mathfrak{c}(x) &= \text{card}\{j \in \{1, \dots, d\} : x_j = \mathfrak{m}(x)\}. \end{aligned}$$

Следующие три леммы используются в §3 при оценке точности приближений на основе рассмотренных там кратных рядов.

Лемма 1.2.2

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и $\mathfrak{M}(\beta^{-1}\alpha) > 0$. Тогда существуют константы $c_1(d, \alpha, \beta) > 0$ и $c_2(d, \alpha, \beta) > 0$ такие, что для $r \in \mathbb{N}$ соблюдается неравенство

$$c_1 2^{\mathfrak{M}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{C}(\beta^{-1}\alpha)-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} 2^{(\kappa, \alpha)} \leq c_2 2^{\mathfrak{M}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{C}(\beta^{-1}\alpha)-1}. \quad (1.2.2)$$

Лемма 1.2.3

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существуют константы $c_3(d, \alpha, \beta) > 0$ и $c_4(d, \alpha, \beta) > 0$ такие, что при $r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$c_3 2^{-\mathfrak{m}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{c}(\beta^{-1}\alpha)-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-(\kappa, \alpha)} \leq c_4 2^{-\mathfrak{m}(\beta^{-1}\alpha)r} r^{\mathfrak{c}(\beta^{-1}\alpha)-1}. \quad (1.2.3)$$

Доказательство лемм 1.2.2 и 1.2.3 приведено в [6].

Лемма 1.2.4

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, $\epsilon > 0$, $\tau \geq 0$. Пусть еще $J \subset \{1, \dots, d\}$ – непустое подмножество, $J' = \{1, \dots, d\} \setminus J$ и $\mathfrak{c} = \text{card } J$. Тогда существует константа $c_5(d, \beta, \epsilon, \tau, J) > 0$ такая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : s-1 < (\kappa, \beta) \leq s} 2^{-\epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{\tau} \leq c_5 s^{\epsilon-1}. \quad (1.2.4)$$

Доказательство.

В самом деле, используя неравенство

$$\text{card}\{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r-1 \leq (\kappa, \alpha) \leq r+1\} \leq c_0(d, \alpha)(r+1)^{d-1}, \alpha \in \mathbb{R}_+^d, r \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N},$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : s-1 < (\kappa, \beta) \leq s} 2^{-\epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{\tau} \\ & \leq \sum_{i=1}^s \sum_{\kappa^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J, \kappa^{J'} \in (\mathbb{Z}_+^d)^{J'} : i-1 \leq (\kappa^J, \beta^J) \leq i, s-i-1 \leq (\kappa^{J'}, \beta^{J'}) \leq s-i+1} 2^{-\epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{\tau} \\ & = \sum_{i=1}^s \sum_{\kappa^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J : i-1 \leq (\kappa^J, \beta^J) \leq i} \sum_{\kappa^{J'} \in (\mathbb{Z}_+^d)^{J'} : s-i-1 \leq (\kappa^{J'}, \beta^{J'}) \leq s-i+1} 2^{-\epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{\tau} \\ & \leq \sum_{i=1}^s \sum_{\kappa^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J : i-1 \leq (\kappa^J, \beta^J) \leq i} \sum_{\kappa^{J'} \in (\mathbb{Z}_+^d)^{J'} : s-i-1 \leq (\kappa^{J'}, \beta^{J'}) \leq s-i+1} 2^{-\epsilon(s-i-1)} (s-i+2)^{\tau} \\ & \leq \sum_{i=1}^s 2^{-\epsilon(s-i-1)} (s-i+2)^{\tau} \text{card}\{\kappa^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J : i-1 \leq (\kappa^J, \beta^J) \leq i+1\} \times \\ & \quad \text{card}\{\kappa^{J'} \in (\mathbb{Z}_+^d)^{J'} : s-i-1 \leq (\kappa^{J'}, \beta^{J'}) \leq s-i+1\} \\ & \leq \sum_{i=1}^s 2^{-\epsilon(s-i-1)} (s-i+2)^{\tau} (i+1)^{\mathfrak{c}-1} (s-i+1)^{d-\mathfrak{c}-1} \\ & \leq (s+1)^{\mathfrak{c}-1} \sum_{k=0}^{s-1} 2^{-\epsilon(k-1)} (k+2)^{\tau} (k+1)^{d-\mathfrak{c}-1} \\ & \leq 2^{\mathfrak{c}-1} s^{\mathfrak{c}-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\epsilon(k-1)} (k+2)^{\tau} (k+1)^{d-\mathfrak{c}-1} = c_6 s^{\mathfrak{c}-1}. \square \end{aligned}$$

1.3. В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые используются в следующем пункте и далее.

Как показано в [7], [8], справедлива

Лемма 1.3.1

Пусть $d \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$. Тогда

1) при $j = 1, \dots, d$ для любого непрерывного линейного оператора $T : L_p(I) \mapsto L_p(I)$ существует единственный непрерывный линейный оператор $\mathcal{T}^j : L_p(I^d) \mapsto L_p(I^d)$, для которого для любой функции $f \in L_p(I^d)$ почти для всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in I^{d-1}$ в $L_p(I)$ выполняется равенство

$$(\mathcal{T}^j f)(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) = (T(f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d))) (\cdot), \quad (1.3.1)$$

2) при этом, для каждого $j = 1, \dots, d$ отображение $V_j^{L_p}$, которое каждому оператору $T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ ставит в соответствие оператор $V_j^{L_p}(T) = \mathcal{T}^j \in \mathcal{B}(L_p(I^d), L_p(I^d))$, удовлетворяющий (1.3.1), является непрерывным гомоморфизмом банаховой алгебры $\mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ в банахову алгебру $\mathcal{B}(L_p(I^d), L_p(I^d))$,

3) причем, для любых операторов $S, T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ при любых $i, j = 1, \dots, d : i \neq j$, соблюдается равенство

$$(V_i^{L_p}(S)V_j^{L_p}(T))f = (V_j^{L_p}(T)V_i^{L_p}(S))f, f \in L_p(I^d). \quad (1.3.2)$$

Замечание.

Если при $d \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq q < \infty$, оператор $T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I)) \cap \mathcal{B}(L_q(I), L_q(I))$, то при $j = 1, \dots, d$ для $f \in L_q(I^d)$ справедливо равенство $(V_j^{L_p}T)f = (V_j^{L_q}T)f$. Поэтому символы L_p, L_q в качестве индексов у V_j можно опускать.

1.4. В этом пункте будут построены семейства операторов проектирования на подпространства кусочно-полиномиальных функций, и описаны их свойства, которые используются в п. 2.2. при доказательстве основных результатов работы и в п. 3.3. при применении этих результатов.

Отметим сразу, что справедливость всех утверждений, приведенных в этом пункте без доказательства, установлена в [5].

Для $d \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^d$ будем писать $x \leq y$ ($x < y$), если для каждого $j = 1, \dots, d$ выполняется неравенство $x_j \leq y_j$ ($x_j < y_j$).

Для $d \in \mathbb{N}, m, n \in \mathbb{Z}^d : m \leq n$, обозначим

$$\mathcal{N}_{m,n}^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d : m \leq \nu \leq n\} = \prod_{j=1}^d \mathcal{N}_{m_j, n_j}^1.$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $t \in \mathbb{R}^d$ через 2^t будем обозначать вектор $2^t = (2^{t_1}, \dots, 2^{t_d})$.

Для $d \in \mathbb{N}, \kappa \in \mathbb{Z}^d, \nu \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через $\chi_{\kappa, \nu}^d$ характеристическую функцию множества $Q_{\kappa, \nu}^d = 2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}I^d$. Понятно, что при $d \in \mathbb{N}, \kappa \in \mathbb{Z}^d, \nu \in \mathbb{Z}^d$ имеют место равенства

$$Q_{\kappa, \nu}^d = \prod_{j=1}^d Q_{\kappa_j, \nu_j}^1, \chi_{\kappa, \nu}^d(x) = \prod_{j=1}^d \chi_{\kappa_j, \nu_j}^1(x_j), x \in \mathbb{R}^d.$$

Введем в рассмотрение пространства кусочно-полиномиальных функций.

Для $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{P}_\kappa^{d, l}$ обозначим линейное подпространство в $L_\infty(I^d)$, состоящее из функций $f \in L_\infty(I^d)$, для каждой из которых существует набор полиномов $\{f_\nu \in \mathcal{P}^{d, l}, \nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d\}$ такой, что

$$f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d} f_\nu \chi_{\kappa, \nu}^d. \quad (1.4.1)$$

При определении операторов проектирования на подпространства $\mathcal{P}_\kappa^{d, l}$ используются операторы из следующего предложения.

Предложение 1.4.1

Пусть $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда для любого $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$ для $Q = x^0 + \delta I^d$ существует единственный линейный оператор $P_{\delta, x^0}^{d, l} : L_1(Q) \mapsto \mathcal{P}^{d, l}$, обладающий следующими свойствами:

1) для $f \in \mathcal{P}^{d, l}$ имеет место равенство

$$P_{\delta, x^0}^{d, l}(f|_Q) = f,$$

2)

$$\ker P_{\delta, x^0}^{d, l} = \left\{ f \in L_1(Q) : \int_Q f(x)g(x) dx = 0 \ \forall g \in \mathcal{P}^{d, l} \right\},$$

причем, существуют константы $c_1(d, l) > 0$ и $c_2(d, l) > 0$ такие, что

3) при $1 \leq p \leq \infty$ для $f \in L_p(Q)$ справедливо неравенство

$$\|P_{\delta, x^0}^{d, l}f\|_{L_p(Q)} \leq c_1\|f\|_{L_p(Q)},$$

4) при $1 \leq p < \infty$ для $f \in L_p(Q)$ выполняется неравенство

$$\|f - P_{\delta, x^0}^{d, l}f\|_{L_p(Q)} \leq c_2 \sum_{j=1}^d \delta_j^{-1/p} \left(\int_{\delta_j B^1} \int_{Q_{(l_j+1)\xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j+1} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p}.$$

Для $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, \nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d$ определим непрерывный линейный оператор $S_{\kappa, \nu}^{d, l} : L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}^{d, l}(I^d) \cap L_\infty(I^d)$, полагая для $f \in L_1(I^d)$ значение

$$S_{\kappa, \nu}^{d, l} f = P_{\delta, x^0}^{d, l}(f|_{(x^0 + \delta I^d)})$$

при $\delta = 2^{-\kappa}, x^0 = 2^{-\kappa} \nu$ (см. предложение 1.4.1).

Определим при $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ линейный непрерывный оператор $E_\kappa^{d, l} : L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}_\kappa^{d, l} \cap L_\infty(I^d)$ равенством

$$E_\kappa^{d, l} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d} (S_{\kappa, \nu}^{d, l} f) \chi_{\kappa, \nu}^d, f \in L_1(I^d).$$

Следующая лемма будет полезна как в этом пункте, так и в п. 2.2.

Лемма 1.4.2

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $\kappa, \kappa', \nu, \nu' \in \mathbb{Z}^d$ таковы, что $\kappa' \leq \kappa$, а $Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d \neq \emptyset$. Тогда имеет место включение

$$Q_{\kappa, \nu}^d \subset Q_{\kappa', \nu'}^d. \quad (1.4.2)$$

Доказательство. В условиях леммы, выбирая $x \in Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d$, имеем

$$2^{-\kappa} \nu < x < 2^{-\kappa'} \nu' + 2^{-\kappa'}$$

и

$$2^{-\kappa'} \nu' < x < 2^{-\kappa} \nu + 2^{-\kappa},$$

откуда

$$\nu < 2^{\kappa - \kappa'} \nu' + 2^{\kappa - \kappa'}$$

и

$$2^{\kappa - \kappa'} \nu' < \nu + \epsilon,$$

а, следовательно,

$$\nu \leq 2^{\kappa - \kappa'} \nu' + 2^{\kappa - \kappa'} - \epsilon$$

и

$$2^{\kappa - \kappa'} \nu' \leq \nu$$

или

$$2^{\kappa - \kappa'} \nu' \leq \nu \leq 2^{\kappa - \kappa'} \nu' + 2^{\kappa - \kappa'} - \epsilon.$$

Поэтому для $x \in Q_{\kappa, \nu}^d$ выполняются соотношения

$$2^{-\kappa} \nu < x < 2^{-\kappa} \nu + 2^{-\kappa}$$

а, значит,

$$2^{-\kappa}2^{\kappa-\kappa'}\nu' \leq 2^{-\kappa}\nu < x < 2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa} \leq 2^{-\kappa}(2^{\kappa-\kappa'}\nu' + 2^{\kappa-\kappa'} - \mathfrak{e}) + 2^{-\kappa}$$

или

$$2^{-\kappa'}\nu' < x < 2^{-\kappa'}\nu' + 2^{-\kappa'},$$

т.е. $x \in Q_{\kappa',\nu'}^d$. \square

Из (1.4.2) следует, что при $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa, \kappa' \in \mathbb{Z}_+^d : \kappa' \leq \kappa$, справедливо включение

$$\mathcal{P}_{\kappa'}^{d,l} \subset \mathcal{P}_{\kappa}^{d,l}. \quad (1.4.3)$$

Заметим, что ввиду (1.4.3) при $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\epsilon \in \Upsilon^d : f(\epsilon) \subset f(\kappa)$, справедливо включение $\mathcal{P}_{\kappa-\epsilon}^{d,l} \subset \mathcal{P}_{\kappa}^{d,l}$.

Принимая во внимание это обстоятельство, при $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ определим линейный непрерывный оператор $\mathcal{E}_{\kappa}^{d,l} : L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}_{\kappa}^{d,l} \cap L_{\infty}(I^d)$, полагая

$$\mathcal{E}_{\kappa}^{d,l} = \sum_{\epsilon \in \Upsilon^d : f(\epsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathfrak{e})^{\epsilon} E_{\kappa-\epsilon}^{d,l}.$$

Лемма 1.4.3

Пусть $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{\kappa}^{d,l} = \prod_{j=1}^d V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j}). \quad (1.4.4)$$

Лемма 1.4.4

Пусть $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для $f \in \mathcal{P}_{\kappa}^{d,l}$ соблюдается равенство

$$E_{\kappa}^{d,l} f = f; \quad (1.4.5)$$

2) при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ ядро

$$\ker E_{\kappa}^{d,l} = \left\{ f \in L_1(I^d) : \int_{I^d} f(x)g(x) dx = 0 \ \forall g \in \mathcal{P}_{\kappa}^{d,l} \right\}.$$

Лемма 1.4.5

При $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa, \kappa' \in \mathbb{Z}_+^d$ соблюдаются равенства

$$\mathcal{E}_{\kappa}^{d,l} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} = \begin{cases} \mathcal{E}_{\kappa}^{d,l}, & \text{при } \kappa = \kappa'; \\ 0, & \text{при } \kappa \neq \kappa'. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

При $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\mathfrak{P}_\kappa^{d,l} = \mathcal{E}_\kappa^{d,l}(\mathcal{P}_\kappa^{d,l}) \subset \mathcal{P}_\kappa^{d,l}.$$

Лемма 1.4.6

Пусть $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда справедливы следующие соотношения:

1)

$$\mathfrak{S}\mathcal{E}_\kappa^{d,l} = \mathfrak{P}_\kappa^{d,l}, \quad (1.4.7)$$

2) для любых $f, g \in L_1(I^d)$ выполняется равенство

$$\int_{I^d} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) \cdot g dx = \int_{I^d} f \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} g) dx; \quad (1.4.8)$$

3)

$$\ker \mathcal{E}_\kappa^{d,l} = \{f \in L_1(I^d) : \int_{I^d} f g dx = 0 \forall g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,l};$$

4) для $\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d : \kappa' \neq \kappa$, и $f, g \in L_1(I^d)$ верно равенство

$$\int_{I^d} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} g) dx = 0. \quad (1.4.9)$$

Отметим некоторые особенности подпространств $\mathfrak{P}_\kappa^{d,l}, d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$.

При $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d, J = f(\kappa), \rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d$ обозначим через $H_{\kappa,\rho}^{d,l}$ подпространство в $L_\infty(Q_{\kappa-\chi_J,\rho}^d)$, состоящее из функций h , для каждой из которых существует функция $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,l}$ такая, что $h = g|_{Q_{\kappa-\chi_J,\rho}^d}$, а через $U_{\kappa,\rho}^{d,l} : \mathfrak{P}_\kappa^{d,l} \mapsto H_{\kappa,\rho}^{d,l}$ обозначим линейное отображение, которое каждому $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,l}$ ставит в соответствие $h = U_{\kappa,\rho}^{d,l} g = g|_{Q_{\kappa-\chi_J,\rho}^d}$, обозначим еще через $H_\kappa^{d,l}$ прямое произведение $H_\kappa^{d,l} = \prod_{\rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d} H_{\kappa,\rho}^{d,l}$ пространств $H_{\kappa,\rho}^{d,l}$, а также через $U_\kappa^{d,l} : \mathfrak{P}_\kappa^{d,l} \mapsto H_\kappa^{d,l}$ — отображение, которое каждому $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,l}$ сопоставляет $h = \{h_\rho, \rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d\}$ с компонентами $h_\rho = U_{\kappa,\rho}^{d,l} g, \rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J}-\epsilon}^d$.

Справедлива

Лемма 1.4.7

При $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ отображение $U_\kappa^{d,l}$ является изоморфизмом $\mathfrak{P}_\kappa^{d,l}$ на $H_\kappa^{d,l}$.

Далее, при $d \in \mathbb{N}$ для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\nu \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через $A_{\kappa,\nu}^d$ отображение, которое каждой функции f , заданной на некотором множестве $S \subset \mathbb{R}^d$, ставит в соответствие функцию $A_{\kappa,\nu}^d f$, определяемую на множестве $\{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}x \in S\}$ равенством $(A_{\kappa,\nu}^d f)(x) = f(2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}x)$. Так как для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d, \nu \in \mathbb{Z}^d$ отображение $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto 2^{-\kappa}\nu + 2^{-\kappa}x \in \mathbb{R}^d$

— взаимно однозначно, то отображение $A_{\kappa,\nu}^d$ является биекцией на себя множества всех функций с областью определения в \mathbb{R}^d .

Лемма 1.4.8

При $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, J = f(\kappa), \rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J-\epsilon}}^d$ отображение $A_{\kappa-\chi_J,\rho}^d |_{H_{\kappa,\rho}^{d,l}}$ является изоморфизмом $H_{\kappa,\rho}^d$ на $H_{\chi_J}^{d,l}$.

При $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ положим

$$\mathfrak{R}_\kappa^{d,l} = \dim \mathfrak{P}_\kappa^{d,l}.$$

Лемма 1.4.9

Пусть $d \in \mathbb{N}, l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, J = f(\kappa), 1 \leq p \leq \infty$. Тогда имеет место равенство

$$\mathfrak{R}_\kappa^{d,l} = \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l} 2^{(\kappa-\chi_J,\epsilon)}, \quad (1.4.10)$$

и можно построить линейный изоморфизм $\mathcal{I}_\kappa^{d,l}$ подпространства $\mathfrak{P}_\kappa^{d,l}$ на пространство $\mathbb{R}^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l}}$, обладающий тем свойством, что для $g \in \mathfrak{P}_\kappa^{d,l}$ выполняются неравенства

$$c_3 \|g\|_{L_p(I^d)} \leq 2^{-(\kappa-\chi_J,\epsilon)/p} \|\mathcal{I}_\kappa^{d,l} g\|_{l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l}}} \leq c_4 \|g\|_{L_p(I^d)} \quad (1.4.11)$$

с некоторыми константами $c_3 > 0, c_4 > 0$, зависящими только от d, l, p .

Лемма 1.4.10

Пусть $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d, J \subset \{1, \dots, d\} : J \neq \emptyset$, и система функций $\phi_i^{d,l,J} \in L_\infty(\mathbb{R}^d), i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}$ такова, что $\phi_i^{d,l,J}(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^d \setminus I^d, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}$, а

$$\{\phi_i^{d,l,J} |_{I^d} \in \mathfrak{P}_{\chi_J}^{d,l}, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}\}$$

является ортонормированным базисом в $\mathfrak{P}_{\chi_J}^{d,l} \cap L_2(I^d)$. Тогда для любого $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : f(\kappa) = J$, система функций

$$\{2^{(\kappa-\chi_J,\epsilon)/2} \phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J}x - \rho), i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}, \rho \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-\chi_J-\epsilon}}^d\}$$

образует ортонормированный базис в $\mathfrak{P}_\kappa^{d,l} \cap L_2(I^d)$, и для $f \in L_1(I^d)$ почти

для всех $x \in I^d$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x) &= \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}, \rho \in \mathcal{N}_{0, 2^{\kappa-\chi_J-\epsilon}}^d} 2^{(\kappa-\chi_J, \epsilon)} \\
&\times \left(\int_{I^d} \phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J} y - \rho) f(y) dy \right) \phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J} x - \rho) \\
&= \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}, \rho \in \mathcal{N}_{0, 2^{\kappa-\chi_J-\epsilon}}^d} 2^{(\kappa-\chi_J, \epsilon)} \\
&\times \left(\int_{Q_{\kappa-\chi_J, \rho}^d} \phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J} y - \rho) f(y) dy \right) \phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J} x - \rho).
\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Доказательство.

Тот факт, что система функций

$$\{2^{(\kappa-\chi_J, \epsilon)/2} \phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J} x - \rho), i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}, \rho \in \mathcal{N}_{0, 2^{\kappa-\chi_J-\epsilon}}^d\}$$

образует ортонормированный базис в $\mathfrak{P}_\kappa^{d,l} \cap L_2(I^d)$, легко установить, используя леммы 1.4.7 и 1.4.8, а также соотношения

$$\phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J} x - \rho) = ((A_{\kappa-\chi_J, \rho})^{-1} \phi_i^{d,l,J})(x), x \in \mathbb{R}^d;$$

$$\phi_i^{d,l,J}(2^{\kappa-\chi_J} x - \rho) = 0, \text{ при } x \in \mathbb{R}^d \setminus Q_{\kappa-\chi_J, \rho}^d, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}, \rho \in \mathcal{N}_{0, 2^{\kappa-\chi_J-\epsilon}}^d;$$

и равенство (1.4.10).

Равенство (1.4.12) вытекает из (1.4.6), (1.4.7), (1.4.8) и разложения вектора в ортонормированном базисе. \square

Отметим еще, что в условиях леммы 1.4.10 в силу включения $\mathfrak{P}_{\chi_J}^{d,l} \subset \mathcal{P}_{\chi_J}^{d,l}$ и с учетом (1.4.1) имеют место соотношения

$$(\phi_i^{d,l,J})|_{Q_{\chi_J, \nu}^d} \in \mathcal{P}^{d,l}(Q_{\chi_J, \nu}^d), \nu \in \mathcal{N}_{0, 2^{\chi_J-\epsilon}}^d, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_{\chi_J}^{d,l}. \tag{1.4.13}$$

1.5. В этом пункте содержатся утверждения, касающиеся аппроксимационных свойств операторов проектирования, построенных в п. 1.4., которые понадобятся в следующих параграфах.

Из [7], [8] можно извлечь лемму 1.5.1.

Лемма 1.5.1

Пусть $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^d, 1 \leq p < \infty$. Тогда существуют константы $c_1(d, l) > 0, c_2(d) > 0, c_3(d, l) > 0$ и $c_4(d, l) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \|f - E_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} \leq \\ & \leq c_1 \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j/p} \left(\int_{c_2 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(I^d)_{l_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

при $\mathfrak{m}(\kappa) \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} & \|E_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_3 \|f\|_{L_p(I^d)}, \\ & \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_4 \|f\|_{L_p(I^d)}. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Из (1.5.1) и леммы 1.2.1 вытекает

Следствие

В условиях леммы 1.5.1 для $f \in L_p(I^d)$ в пространстве $L_p(I^d)$ имеет место равенство

$$f = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f. \quad (1.5.3)$$

В [5] установлена

Теорема 1.5.2

Пусть $d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^d$. Тогда для любой функции $f \in L_2(I^d)$ справедливо равенство

$$\|f\|_{L_2(I^d)} = \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_2(I^d)}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.5.4)$$

§2. Теорема типа Литтлвуда-Пэли
и оценка сверху нормы функции $\|f\|_{L_p(I^d)}$
через нормы проекций $\|\mathcal{E}_\kappa^{d, l} f\|_{L_p(I^d)}$

2.1. В этом пункте приведены вспомогательные утверждения, на которые опирается доказательство занимающей центральное место в работе леммы 2.2.1. Все утверждения, доказательство которых опущено, взяты из [9, гл. I].

Для локально суммируемой в \mathbb{R}^d функции f определим её максимальную функцию M_f , полагая

$$M_f(x) = \sup_{r \in \mathbb{R}_+} (1/\text{mes } B(x, r)) \int_{B(x, r)} |f(y)| dy, x \in \mathbb{R}^d,$$

где $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\}$, а $|z| = \|z\|_{l_2^d}$ для $z \in \mathbb{R}^d$.

Лемма 2.1.1

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда существует константа $c_1(d) > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha \in \mathbb{R}_+$ множество $\{x \in \mathbb{R}^d : M_f(x) > \alpha\}$ открыто и выполняется неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R}^d : M_f(x) > \alpha\} \leq (c_1/\alpha) \int_{\mathbb{R}^d} |f| dx. \quad (2.1.1)$$

Лемма 2.1.2 Для $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ почти для всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется равенство

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} (1/\text{mes } B(x, r)) \int_{B(x, r)} f(y) dy. \quad (2.1.2)$$

Для замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^d$ и $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\rho(x) = \rho(x, F) = \min_{y \in F} |x - y|.$$

Лемма 2.1.3

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда существует константа $c_2(d) > 0$ такая, что для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^d$, для которого $\text{mes}(\mathbb{R}^d \setminus F) < \infty$, функция $M(x)$, определяемая для $x \in F$ равенством

$$M(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(u) |x - u|^{-(d+1)} du,$$

суммируема на F и соблюдается неравенство

$$\int_F M(x) dx \leq c_2 \text{mes}(\mathbb{R}^d \setminus F). \quad (2.1.3)$$

Лемму 2.1.4 можно рассматривать как некоторый уточняющий вариант теоремы 3 из гл. I в [9].

Лемма 2.1.4

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда существуют константы $c_3(d) > 0, c_4(d) > 0$ такие, что для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^d$, у которого для $W = \mathbb{R}^d \setminus F$ мера $\text{mes } W < \infty$, существует семейство кубов $\{Q_r, r \in \mathbb{N}\}$, обладающих следующими свойствами:

1) для каждого $r \in \mathbb{N}$ куб Q_r имеет вид

$$Q_r = 2^{-k^r} \nu^r + 2^{-k^r} I^d, \quad (2.1.4)$$

где $k^r \in \mathbb{Z}, \nu^r \in \mathbb{Z}^d$;

2)

$$Q_r \cap Q_s = \emptyset, \text{ для } r, s \in \mathbb{N} : r \neq s; \quad (2.1.5)$$

3)

$$W = \cup_{r \in \mathbb{N}} \overline{Q_r}, \quad (2.1.6)$$

где $\overline{Q_r} = 2^{-k^r} \nu^r + 2^{-k^r} \overline{I}^d, r \in \mathbb{N}$;

4) при $r \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$c_3 \text{diam } Q_r < \inf_{x \in Q_r} \rho(x, F) \leq c_4 \text{diam } Q_r, \quad (2.1.7)$$

где $\text{diam } Q = \sup_{x, y \in Q} |x - y|, Q \subset \mathbb{R}^d$.

Доказательство.

Поскольку множество W открыто и мера $\text{mes } W < \infty$, то множество $\{k \in \mathbb{Z} | \exists \nu \in \mathbb{Z}^d : \inf_{x \in Q_{k, \nu}^d} \rho(x, F) > d^{1/2} 2^{-k}\}$ – непусто и ограничено снизу. Поэтому существует $k_0 \in \mathbb{Z}$, для которого соблюдается равенство $k_0 = \min\{k \in \mathbb{Z} | \exists \nu \in \mathbb{Z}^d : \inf_{x \in Q_{k, \nu}^d} \rho(x, F) > d^{1/2} 2^{-k}\}$. Положим $\mathcal{N}_0 = \{\nu \in \mathbb{Z}^d : \inf_{x \in Q_{k_0, \nu}^d} \rho(x, F) > d^{1/2} 2^{-k_0}\}$, а $\mathfrak{Q}_0 = \{Q_{k_0, \nu}^d : \nu \in \mathcal{N}_0\}$. И определим по индукции для $k \in \mathbb{N}$ множества

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k &= \{\nu \in \mathbb{Z}^d : \inf_{x \in Q_{(k_0+k), \nu}^d} \rho(x, F) > d^{1/2} 2^{-(k_0+k)}, \\ Q_{(k_0+k), \nu}^d \cap Q_{(k_0+k'), \nu'}^d &= \emptyset \forall \nu' \in \mathcal{N}_{k'}, k' = 0, \dots, k-1\}, \\ \mathfrak{Q}_k &= \{Q_{(k_0+k), \nu}^d : \nu \in \mathcal{N}_k\}. \end{aligned}$$

Проверим, что для кубов из $\cup_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{Q}_k$ соблюдаются условия (2.1.4) – (2.1.7).

Соотношения (2.1.4), (2.1.5) и первое неравенство в (2.1.7) соблюдаются по построению. Покажем, что второе неравенство в (2.1.7) также выполнено. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathcal{N}_k$. Тогда, учитывая, что $\mathbb{R}^d = \cup_{\nu' \in \mathbb{Z}^d} \overline{Q}_{(k_0+k-1), \nu'}^d$, выберем $\nu' \in \mathbb{Z}^d$, для которого $Q_{(k_0+k), \nu}^d \cap \overline{Q}_{(k_0+k-1), \nu'}^d \neq \emptyset$, а, следовательно, и $Q_{(k_0+k), \nu}^d \cap Q_{(k_0+k-1), \nu'}^d \neq \emptyset$. При этом, ввиду (1.4.3) имеет место включение

$$Q_{(k_0+k), \nu}^d \subset Q_{(k_0+k-1), \nu'}^d. \quad (2.1.8)$$

Проверим, что

$$\inf_{x \in Q_{(k_0+k-1), \nu'}^d} \rho(x, F) \leq d^{1/2} 2^{-(k_0+k-1)}. \quad (2.1.9)$$

Если $k = 0$, то (2.1.9) соблюдается в силу выбора k_0 . При $k = 1$ выполнение (2.1.9) с учтом (2.1.8) следует из определения множеств $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$.

А при $k \in \mathbb{N} : k > 1$, предположим, что

$$\inf_{x \in Q_{(k_0+k-1)\epsilon, \nu'}^d} \rho(x, F) > d^{1/2} 2^{-(k_0+k-1)}.$$

Тогда вследствие (2.1.8), определения множества \mathcal{N}_k и включения $\nu \in \mathcal{N}_k$ мультииндекс $\nu' \notin \mathcal{N}_{k-1}$, и, значит, существуют $j \in \mathbb{Z}_+ : j < k - 1$, и $n \in \mathcal{N}_j$ такие, что

$$Q_{(k_0+k-1)\epsilon, \nu'}^d \cap Q_{(k_0+j)\epsilon, n}^d \neq \emptyset,$$

что в силу (1.4.2), (2.1.8) влечёт включение

$$Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d \subset Q_{(k_0+j)\epsilon, n}^d,$$

которое противоречит принадлежности $\nu \in \mathcal{N}_k$. Полученное противоречие подтверждает справедливость (2.1.9). С учётом (2.1.9) выбирая для произвольного $\epsilon > 0$ точки $y \in F$ и $\xi \in Q_{(k_0+k-1)\epsilon, \nu'}^d$ так, чтобы было $|y - \xi| < d^{1/2} 2^{-(k_0+k-1)} + \epsilon$, для $x \in Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d$, учитывая (2.1.8), имеем

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - \xi| + |y - \xi| < \text{diam } Q_{(k_0+k-1)\epsilon, \nu'}^d + d^{1/2} 2^{-(k_0+k-1)} + \epsilon \\ &= 2d^{1/2} 2^{-(k_0+k-1)} + \epsilon = 4d^{1/2} 2^{-(k_0+k)} + \epsilon = 4 \text{diam } Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d + \epsilon, \end{aligned}$$

откуда

$$\inf_{x \in Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d} \rho(x, F) = \inf_{x \in Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d, y \in F} |x - y| < 4 \text{diam } Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d + \epsilon,$$

что в силу произвольности $\epsilon > 0$ даёт второе неравенство в (2.1.7).

Теперь получим (2.1.6). Для $x_0 \in W$, благодаря открытости W , возьмём $\epsilon > 0$, для которого $B(x_0, 3\epsilon) \subset W$, и найдём $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $d^{1/2} 2^{-(k_0+k)} < \epsilon$. Выбирая $\nu \in \mathbb{Z}^d$, для которого $x_0 \in \overline{Q}_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d$, видим, что для $x \in Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d, y \in F$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x - x_0 + x_0 - y| \geq |x_0 - y| - |x - x_0| \geq 3\epsilon - \text{diam } \overline{Q}_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d \\ &= 3\epsilon - d^{1/2} 2^{-(k_0+k)} > 3d^{1/2} 2^{-(k_0+k)} - d^{1/2} 2^{-(k_0+k)} = 2d^{1/2} 2^{-(k_0+k)}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\inf_{x \in Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d} \rho(x, F) = \inf_{x \in Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d, y \in F} |x - y| \geq 2d^{1/2} 2^{-(k_0+k)} > d^{1/2} 2^{-(k_0+k)}.$$

Принимая во внимание сказанное, получаем, что если $\nu \in \mathcal{N}_k$, то $x_0 \in \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \overline{Q}_r$. Если же $\nu \notin \mathcal{N}_k$, то согласно определению \mathcal{N}_k существуют $j \in \mathbb{Z}_+ : j < k, \nu' \in \mathcal{N}_j$ такие, что

$$Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d \cap Q_{(k_0+j)\epsilon, \nu'}^d \neq \emptyset,$$

и, значит, (см. (1.4.2))

$$Q_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d \subset Q_{(k_0+j)\epsilon, \nu'}^d,$$

а

$$\overline{Q}_{(k_0+k)\epsilon, \nu}^d \subset \overline{Q}_{(k_0+j)\epsilon, \nu'}^d,$$

т.е. $x_0 \in \overline{Q}_{(k_0+j)\epsilon, \nu'}^d \subset \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \overline{Q}_r$. \square

Предложение 2.1.5

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда существует константа $C_5(d) > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}_+$ существуют замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}^d$ и семейство кубов $\{Q_r, r \in \mathbb{N}\}$, со следующими свойствами:

1) почти для всех $x \in F$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq \alpha; \quad (2.1.10)$$

2) для $W = \mathbb{R}^d \setminus F$ справедливо неравенство

$$\text{mes } W \leq (c_1/\alpha) \int_{\mathbb{R}^d} |f| dx; \quad (2.1.11)$$

3) для кубов семейства $\{Q_r, r \in \mathbb{N}\}$ соблюдаются соотношения (2.1.4) – (2.1.7), а также

4) при $r \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$(1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} |f(x)| dx \leq c_5 \alpha. \quad (2.1.12)$$

Схема доказательства предложения 2.1.5 взята из §3 гл. I в [9].

Доказательство.

Для $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$ определим множество F равенством

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d : M_f(x) \leq \alpha\}.$$

ввиду леммы 2.1.1 множество $W = \mathbb{R}^d \setminus F = \{x \in \mathbb{R}^d : M_f(x) > \alpha\}$ – открыто и, значит, множество F – замкнуто. А из (2.1.1) следует (2.1.11). Благодаря (2.1.2), почти для всех $x \in F$ имеем

$$|f(x)| = \lim_{r \rightarrow 0} (1/\text{mes } B(x, r)) \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \leq M_f(x) \leq \alpha,$$

т.е. выполняется (2.1.10).

В соответствии с леммой 2.1.4 для множества F построим семейство кубов $\{Q_r : r \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих условиям (2.1.4) – (2.1.7). Для проверки (2.1.12), принимая во внимание (2.1.7), при $r \in \mathbb{N}$ выберем $\xi_r \in Q_r$ и $x_r \in F$ так, чтобы соблюдалось неравенство $|\xi_r - x_r| < 2c_4 \text{diam } Q_r$. Тогда для $x \in Q_r$ справедливо неравенство

$$|x - x_r| \leq |x - \xi_r| + |\xi_r - x_r| \leq \text{diam } Q_r + 2c_4 \text{diam } Q_r = c_6 \text{diam } Q_r = \delta_r$$

или $Q_r \subset B(x_r, \delta_r)$. Поэтому при $r \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} |f(x)| dx &\leq (1/\text{mes } Q_r) \int_{B(x_r, \delta_r)} |f(x)| dx = \\ &(\text{mes } B(x_r, \delta_r)/\text{mes } Q_r)(1/\text{mes } B(x_r, \delta_r)) \int_{B(x_r, \delta_r)} |f(x)| dx \\ &= c_5(1/\text{mes } B(x_r, \delta_r)) \int_{B(x_r, \delta_r)} |f(x)| dx \leq c_5 M_f(x_r) \leq c_5 \alpha. \square \end{aligned}$$

При $d \in \mathbb{N}$ через $L(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство измеримых по Лебегу функций в \mathbb{R}^d . Как обычно, при $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ под суммой $L_{p_1}(\mathbb{R}^d) + L_{p_2}(\mathbb{R}^d)$ понимается подпространство в $L(\mathbb{R}^d)$, состоящее из всех функций $f \in L(\mathbb{R}^d)$, для которых существуют функции $f_1 \in L_{p_1}(\mathbb{R}^d)$ и $f_2 \in L_{p_2}(\mathbb{R}^d)$ такие, что $f = f_1 + f_2$. Напомним, что при $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 < \infty$ справедливо включение $L_p(\mathbb{R}^d) \subset L_{p_1}(\mathbb{R}^d) + L_{p_2}(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 2.1.6

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 < q < \infty$, $C_0 \in \mathbb{R}_+$, $C_1 \in \mathbb{R}_+$ и $T : (L_1(\mathbb{R}^d) + L_q(\mathbb{R}^d)) \mapsto L(\mathbb{R}^d)$ – отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любых $f, g \in (L_1(\mathbb{R}^d) + L_q(\mathbb{R}^d))$ почти для всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$|(T(f+g))(x)| \leq |(Tf)(x)| + |(Tg)(x)|; \quad (2.1.13)$$

2) для $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha > 0$ соблюдается неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R}^d : |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq (C_0/\alpha) \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}; \quad (2.1.14)$$

3) для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R}^d : |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq ((C_1/\alpha) \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)})^q. \quad (2.1.15)$$

Тогда при $1 < p < q$ существует константа $c_7(p, q, C_0, C_1) > 0$ такая, что для любого отображения $T : (L_1(\mathbb{R}^d) + L_q(\mathbb{R}^d)) \mapsto L(\mathbb{R}^d)$, подчиненного условиям (2.1.13) – (2.1.15), для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ имеет место неравенство

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leq c_7 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.1.16)$$

2.2. В этом пункте устанавливается аналог теоремы Литтлвуда-Пэли для операторов $\{\mathcal{E}_\kappa^{d,l}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d\}$ (см. теорему 2.2.4), а из него выводится утверждение, содержащее оценку, объявленную в названии параграфа (см. следствие из теоремы 2.2.4). При этом при доказательстве теоремы 2.2.4 будем придерживаться того же подхода, что в [3, п. 1.5.2] в случае теоремы Литтлвуда-Пэли для кратных рядов Фурье. Убедимся, что имеет место

Лемма 2.2.1

Пусть $l \in \mathbb{Z}_+, 1 < p < \infty$. Тогда существует константа $c_1(l, p) > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{N}$ для любого набора чисел $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}$, для $f \in L_p(I)$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} \leq c_1 \|f\|_{L_p(I)}. \quad (2.2.1)$$

Отметим, что доказательство леммы 2.2.1 проводится по схеме, использованной в [9] при доказательстве теоремы 1 из гл. II.

Доказательство.

Сначала установим справедливость (2.2.1) при $1 < p \leq 2$. Принимая во внимание, что для $f \in L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R})$ имеет место включение $f|_I \in L_1(I)$, определим при $k \in \mathbb{N}$ отображение $T = T_{k,\sigma} : L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R}) \mapsto L(\mathbb{R})$, полагая для $f \in (L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R}))$ значение

$$(Tf)(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus I; \\ \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(f|_I))(x), & \text{при } x \in I. \end{cases}$$

При $k \in \mathbb{N}, \sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}$ для $f, g \in (L_1(\mathbb{R}) + L_2(\mathbb{R}))$

имеем

$$\begin{aligned}
|(T(f+g))(x)| &= 0 = 0 + 0 = |(Tf)(x)| + |(Tg)(x)|, x \in \mathbb{R} \setminus I; \\
|(T(f+g))(x)| &= \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}((f+g)|_I))(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I + g|_I))(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{\kappa=1}^k (\sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I))(x) + \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(g|_I))(x)) \right| = \\
&= \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I))(x) + \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(g|_I))(x) \right| \leq \\
&= \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I))(x) \right| + \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(g|_I))(x) \right| = \\
&= |(Tf)(x)| + |(Tg)(x)|, \text{ почти для всех } x \in I, \quad (2.2.2)
\end{aligned}$$

т.е. выполняется (2.1.13).

Далее, покажем, что при $k \in \mathbb{N}, \sigma = \{\sigma_{\kappa} \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}$, для $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$ соблюдается неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq ((1/\alpha)\|f\|_{L_2(\mathbb{R})})^2. \quad (2.2.3)$$

В самом деле, при $k \in \mathbb{N}, \sigma = \{\sigma_{\kappa} \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}$, для $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$ ввиду (1.4.9), (1.5.4) имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(Tf)(x)|^2 dx &= \int_I \left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I))(x) \right)^2 dx = \\
&= \int_I \sum_{\kappa=1}^k \sum_{\kappa'=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I))(x) \sigma_{\kappa'}(\mathcal{E}_{\kappa'}^{1,l}(f|_I))(x) dx = \\
&= \sum_{\kappa=1}^k \sum_{\kappa'=1}^k \sigma_{\kappa} \sigma_{\kappa'} \int_I (\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I))(x) (\mathcal{E}_{\kappa'}^{1,l}(f|_I))(x) dx \\
&= \sum_{\kappa=1}^k \int_I ((\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(f|_I))(x))^2 dx \\
&= \sum_{\kappa=1}^k \|\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l} f|_I\|_{L_2(I)}^2 \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+} \|\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l} f|_I\|_{L_2(I)}^2 = \|f|_I\|_{L_2(I)}^2 \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,
\end{aligned}$$

откуда, как обычно, получаем

$$\begin{aligned}\alpha^2 \text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} &= \int_{\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\}} \alpha^2 dx \\ &\leq \int_{\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\}} |(Tf)(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |(Tf)(x)|^2 dx \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,\end{aligned}$$

и, значит, верно (2.2.3).

Теперь установим, что существует константа $C_0(l) > 0$ такая, что при $k \in \mathbb{N}, \sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}$ для $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$ соблюдается неравенство

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq (C_0/\alpha) \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.2.4)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}, \sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}, f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\alpha > 0$. Для функции f и числа α построим замкнутое множество F , множество $W = \mathbb{R} \setminus F$ и семейство интервалов $\{Q_r, r \in \mathbb{N}\}$, для которых соблюдаются условия (2.1.4) – (2.1.7) и (2.1.10) – (2.1.12) при $d = 1$. Обозначая через χ_A характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{R}$, определим функции $g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ и $h \in L_1(\mathbb{R})$, полагая

$$g(x) = f(x)\chi_F(x) + \sum_{r=1}^{\infty} (1/\text{mes } Q_r) \left(\int_{Q_r} f(y) dy \right) \chi_{Q_r}(x), x \in \mathbb{R},$$

и $h = f - g$.

Из (2.1.6), (2.1.5) с учетом того, что $\text{mes}(W \setminus (\cup_{r \in \mathbb{N}} Q_r)) = 0$ (ибо $(W \setminus (\cup_{r \in \mathbb{N}} Q_r)) \subset \cup_{r \in \mathbb{N}} (\overline{Q_r} \setminus Q_r)$), вытекает, что почти для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\chi_W(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \chi_{Q_r}(x)$. Поэтому почти для всех $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$\begin{aligned}h(x) &= f(x) - g(x) = f(x)\chi_F(x) + f(x)\chi_W(x) - g(x) \\ &= f(x)\chi_F(x) + f(x) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \chi_{Q_r}(x) \right) - g(x) \\ &= f(x) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \chi_{Q_r}(x) \right) - \sum_{r=1}^{\infty} (1/\text{mes } Q_r) \left(\int_{Q_r} f(y) dy \right) \chi_{Q_r}(x) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (f(x) - (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} f(y) dy) \chi_{Q_r}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} h_r(x),\end{aligned}$$

где $h_r(x) = (f(x) - (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} f(y) dy) \chi_{Q_r}(x)$.

Учитывая (2.1.5), (2.1.6), на основании (2.1.10) и (2.1.12) заключаем, что почти для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|g(x)| \leq c_2\alpha$, из которого вытекает оценка

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} c_2\alpha |g(x)| dx = \\
&= c_2\alpha \int_{\mathbb{R}} |f(x)\chi_F(x) + \sum_{r=1}^{\infty} (1/\text{mes } Q_r) (\int_{Q_r} f(y) dy) \chi_{Q_r}(x)| dx \leq \\
&= c_2\alpha \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \chi_F(x) + \sum_{r=1}^{\infty} (1/\text{mes } Q_r) |\int_{Q_r} f(y) dy| \chi_{Q_r}(x) dx = \\
&= c_2\alpha (\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \chi_F(x) dx + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (1/\text{mes } Q_r) |\int_{Q_r} f(y) dy| \chi_{Q_r}(x) dx) = \\
&= c_2\alpha (\int_F |f(x)| dx + \sum_{r=1}^{\infty} (1/\text{mes } Q_r) |\int_{Q_r} f(y) dy| \int_{\mathbb{R}} \chi_{Q_r}(x) dx) \leq \\
&= c_2\alpha (\int_F |f(x)| dx + \sum_{r=1}^{\infty} (1/\text{mes } Q_r) (\int_{Q_r} |f(y)| dy) \text{mes } Q_r) = \\
&= c_2\alpha (\int_F |f(x)| dx + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{Q_r} |f(x)| dx) = \\
&= c_2\alpha \int_{F \cup (\cup_{r=1}^{\infty} Q_r)} |f(x)| dx = c_2\alpha \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = c_2\alpha \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Для получения (2.2.4), фиксируя множество $A \subset \mathbb{R} : \text{mes } A = 0$ и для $x \in \mathbb{R} \setminus A$ ввиду (2.2.2) имеет место неравенство

$$|(Tf)(x)| = |(T(g+h))(x)| \leq |(Tg)(x)| + |(Th)(x)|,$$

ВИДИМ, ЧТО

$$\begin{aligned}
(\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} \setminus A) &\subset \{x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| + |(Th)(x)| > \alpha\} \\
&\subset \{x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| > \alpha/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \alpha/2\},
\end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned}
\text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} &= \text{mes}(\{x \in \mathbb{R} : |(Tf)(x)| > \alpha\} \setminus A) \\
&\leq \text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| > \alpha/2\} + \text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \alpha/2\}. \quad (2.2.6)
\end{aligned}$$

Из (2.2.3) и (2.2.5) выводим

$$\begin{aligned}
\text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Tg)(x)| > \alpha/2\} &\leq ((2/\alpha)\|g\|_{L_2(\mathbb{R})})^2 = (2/\alpha)^2 \|g\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq (2/\alpha)^2 c_2\alpha \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = (c_3/\alpha) \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (2.2.6) имеем

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \\ = \{x \in F : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \cup \{x \in W : |(Th)(x)| > \alpha/2\}, \end{aligned}$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \\ = \text{mes}\{x \in F : |(Th)(x)| > \alpha/2\} + \text{mes}\{x \in W : |(Th)(x)| > \alpha/2\}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Второе слагаемое в правой части (2.2.8) в силу (2.1.11) удовлетворяет неравенству

$$\text{mes}\{x \in W : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \leq \text{mes } W \leq (c_4/\alpha) \int_{\mathbb{R}} |f| dx = (c_4/\alpha) \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.2.9)$$

Учитывая, что $(Th)(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R} \setminus I$, находим, что

$$\{x \in F : |(Th)(x)| > \alpha/2\} = \{x \in (F \cap I) : |(Th)(x)| > \alpha/2\},$$

а, значит,

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in F : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \\ = \text{mes}\{x \in (F \cap I) : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \leq (2/\alpha) \|Th\|_{L_1(F \cap I)}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Для проведения оценки правой части (2.2.10) определим при $m \in \mathbb{N}$ функцию h'_m равенством

$$h'_m = h - \sum_{r=1}^m h_r$$

и заметим, что вследствие (2.2.2) при $m \in \mathbb{N}$ почти для всех $x \in (F \cap I)$ справедливо неравенство

$$|(Th)(x)| = |(T(\sum_{r=1}^m h_r + h'_m))(x)| \leq \sum_{r=1}^m |(Th_r)(x)| + |(Th'_m)(x)|,$$

которое влечет оценку

$$\begin{aligned} \|Th\|_{L_1(F \cap I)} &= \int_{F \cap I} |(Th)(x)| dx \leq \int_{F \cap I} (\sum_{r=1}^m |(Th_r)(x)|) + |(Th'_m)(x)| dx \\ &= \sum_{r=1}^m \int_{F \cap I} |(Th_r)(x)| dx + \int_{F \cap I} |(Th'_m)(x)| dx. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

При $r \in \mathbb{N}$ оценим сверху значения $|(Th_r)(x)|$ для $x \in F \cap I$.

Если $r \in \mathbb{N}$ таково, что $Q_r \cap I = \emptyset$, то $(Th_r)(x) = 0$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $F \cap I \neq \emptyset$ и $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset$. Тогда ввиду (2.1.4), (1.4.2) либо $Q_r \subset I$, либо $I \subset Q_r$. Второе включение невозможно, поскольку если оно верно, то $F \cap I \subset I \subset Q_r$, т.е. $F \cap Q_r \neq \emptyset$, что противоречит (2.1.6) и определению W . Поэтому в рассматриваемой ситуации $Q_r \subset I$. Отметим, что

$$I = (\cup_{n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1} Q_{k,n}^1) \cup \{2^{-k}\nu : \nu = 1, \dots, 2^k - 1\},$$

и, значит,

$$\begin{aligned} F \cap I &= (\cup_{n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1} (F \cap Q_{k,n}^1)) \cup (F \cap \{2^{-k}\nu : \nu = 1, \dots, 2^k - 1\}) \\ &= (\cup_{n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset} (F \cap Q_{k,n}^1)) \cup (F \cap \{2^{-k}\nu : \nu = 1, \dots, 2^k - 1\}). \end{aligned}$$

Учитывая это замечание, проведем оценку сверху $|(Th_r)(x)|$ при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$ для $x \in F \cap Q_{k,n}^1$. Фиксируя систему функций

$$\{\phi_i = \phi_i^{1,l,\{1\}}, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}\},$$

удовлетворяющую условиям леммы 1.4.10 при $d = 1, J = \{1\}$, согласно (1.4.12), при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех

$x \in F \cap Q_{k,n}^1$ имеем

$$\begin{aligned}
|(Th_r)(x)| &= \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa}(\mathcal{E}_{\kappa}^{1,l}(H_r|_I))(x) \right| \\
&= \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_{\kappa} \left(\sum_{\rho_{\kappa-1} \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa-1}-1}^1} \sum_{i=1,\dots,\mathfrak{R}_1^{1,l}} 2^{\kappa-1} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_{Q_{\kappa-1,\rho_{\kappa-1}}^1} \phi_i(2^{\kappa-1}y - \rho_{\kappa-1})h_r(y)dy \right) \phi_i(2^{\kappa-1}x - \rho_{\kappa-1}) \right) \Big| \\
&= \left| \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sigma_{\kappa+1} \left(\sum_{\rho_{\kappa} \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa}-1}^1} \sum_{i=1,\dots,\mathfrak{R}_1^{1,l}} 2^{\kappa} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_{Q_{\kappa,\rho_{\kappa}}^1} \phi_i(2^{\kappa}y - \rho_{\kappa})h_r(y)dy \right) \phi_i(2^{\kappa}x - \rho_{\kappa}) \right) \Big| \\
&= \left| \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sigma_{\kappa+1} \left(\sum_{\rho_{\kappa} \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa}-1}^1 : Q_{\kappa,\rho_{\kappa}}^1 \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset} \sum_{i=1,\dots,\mathfrak{R}_1^{1,l}} 2^{\kappa} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_{Q_{\kappa,\rho_{\kappa}}^1} \phi_i(2^{\kappa}y - \rho_{\kappa})h_r(y)dy \right) \phi_i(2^{\kappa}x - \rho_{\kappa}) \right) \Big|.
\end{aligned}$$

Заметим, что при $\kappa = 0, \dots, k$ множество $\{\rho_{\kappa} \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa}-1}^1 : Q_{\kappa,\rho_{\kappa}}^1 \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset\}$ состоит из единственного элемента, который обозначим $\rho_{\kappa}(n)$. Непустота этого множества следует из включения $Q_{k,n}^1 \subset I \subset \bigcup_{\rho_{\kappa} \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa}-1}^1} \overline{Q}_{\kappa,\rho_{\kappa}}^1$, а единственность, в силу (1.4.2), вытекает из включения $Q_{k,n}^1 \subset Q_{\kappa,\rho_{\kappa}}^1$ для $\rho_{\kappa} \in \mathcal{N}_{0,2^{\kappa}-1}^1 : Q_{\kappa,\rho_{\kappa}}^1 \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$.

Принимая во внимание сказанное, получаем, что при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$ почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ выполняется

соотношение

$$\begin{aligned}
|(Th_r)(x)| &= \left| \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sigma_{\kappa+1} \cdot \left(\sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} 2^\kappa \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_{Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right) \phi_i(2^\kappa x - \rho_\kappa(n)) \right) \Big| \\
&\leq \sum_{\kappa=0}^{k-1} |\sigma_{\kappa+1}| \left(\sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} |2^\kappa| \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_{Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right) \phi_i(2^\kappa x - \rho_\kappa(n)) \right) \Big| \\
&\leq \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} 2^\kappa \\
&\quad \times \left| \int_{Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \cdot \|\phi_i\|_{L_\infty(I)} \\
&\leq c_5(l) \sum_{\kappa=0}^{k-1} \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} 2^\kappa \left| \int_{Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \\
&= c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} \sum_{\kappa=0}^{k-1} 2^\kappa \left| \int_{Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \\
&= c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} \sum_{\kappa=0}^{k-1} 2^\kappa \left| \int_{Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \\
&= c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}} \sum_{\kappa=0, \dots, k-1: Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r \neq \emptyset} 2^\kappa \\
&\quad \times \left| \int_{Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right|. \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

Для оценки правой части (2.2.12) установим справедливость леммы 2.2.2.

Лемма 2.2.2

Пусть $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^{k-1}}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$. Положим

$$\iota = \iota(r, n) = \max\{\kappa = 0, \dots, k-1 : Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r \neq \emptyset\}.$$

Тогда для $\kappa = 0, \dots, \iota$ существует $\nu_\kappa = \nu_\kappa(r, n) \in \{0, 1\}$ такое, что справедливо включение

$$Q_r \subset (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + \nu_\kappa) + 2^{-(\kappa+1)}I). \quad (2.2.13)$$

Доказательство.

Прежде всего отметим, что при $\kappa = 0, \dots, k-1$ в силу (1.4.2) $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \subset Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1$, и, следовательно,

$$2^{-\kappa}\rho_\kappa(n) \leq 2^{-(\kappa+1)}\rho_{\kappa+1}(n) < 2^{-(\kappa+1)}\rho_{\kappa+1}(n) + 2^{-(\kappa+1)} \leq 2^{-\kappa}\rho_\kappa(n) + 2^{-\kappa},$$

или

$$2\rho_\kappa(n) \leq \rho_{\kappa+1}(n) < 2\rho_\kappa(n) + 2,$$

т.е.

$$2\rho_\kappa(n) \leq \rho_{\kappa+1}(n) \leq 2\rho_\kappa(n) + 1,$$

а, значит, существует $\epsilon_\kappa(n) \in \{0, 1\}$ такое, что соблюдается равенство

$$\rho_{\kappa+1}(n) = 2\rho_\kappa(n) + \epsilon_\kappa(n). \quad (2.2.14)$$

ввиду (2.2.14) при $\kappa = 0, \dots, k-1$ имеем

$$\begin{aligned} Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 &= 2^{-\kappa}\rho_\kappa(n) + 2^{-\kappa}I = \\ &= 2^{-\kappa}\rho_\kappa(n) + 2^{-\kappa}((2^{-1}I) \cup (2^{-1} + 2^{-1}I) \cup \{2^{-1}\}) = \\ &= 2^{-\kappa}\rho_\kappa(n) + ((2^{-(\kappa+1)}I) \cup (2^{-(\kappa+1)} + 2^{-(\kappa+1)}I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}\}) = \\ &= (2^{-(\kappa+1)}2\rho_\kappa(n) + 2^{-(\kappa+1)}I) \cup (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1) + 2^{-(\kappa+1)}I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1)\} = \\ &= (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + \epsilon_\kappa(n)) + 2^{-(\kappa+1)}I) \cup \\ &\cup (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1 - \epsilon_\kappa(n)) + 2^{-(\kappa+1)}I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1)\} = \\ &= Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cup (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1 - \epsilon_\kappa(n)) + 2^{-(\kappa+1)}I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + 1)\}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Далее, при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^k-1}^1 : F \cap Q_{k, n}^1 \neq \emptyset, \kappa = 0, \dots, \iota$ с учетом (1.4.2) имеем

$$(Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \cap Q_r) \supset (Q_{\iota, \rho_\iota(n)}^1 \cap Q_r) \neq \emptyset$$

и, следовательно (см. (2.1.4), (1.4.2)), либо

$$Q_r \subset Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1, \quad (2.2.16)$$

либо

$$Q_{\kappa, \rho_\kappa(n)}^1 \subset Q_r.$$

Последнее включение невозможно, ибо если оно справедливо, то

$$(F \cap Q_r) \supset (F \cap Q_{\kappa, \rho_{\kappa}(n)}^1) \supset (F \cap Q_{k,n}^1) \neq \emptyset,$$

т.е. $F \cap Q_r \neq \emptyset$, что неверно. Итак, при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^{k-1}}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = 0, \dots, \iota$ соблюдается (2.2.16).

Теперь при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^{k-1}}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = 0, \dots, \iota - 1$ из (2.2.16) с $\kappa + 1$ вместо κ и (2.2.14) следует (2.2.13).

Далее, при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^{k-1}}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = \iota < k - 1$ справедливо соотношение $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r = \emptyset$, что в соединении с (2.2.16), (2.2.15) дает включение

$$Q_r \subset (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_{\kappa}(n)+1-\epsilon_{\kappa}(n))+2^{-(\kappa+1)}I) \cup \{2^{-(\kappa+1)}(2\rho_{\kappa}(n)+1)\}, \quad (2.2.17)$$

которое влечет (2.2.13), поскольку $(2^{-(\kappa+1)}(2\rho_{\kappa}(n)+1)) \notin Q_r$, ибо если $(2^{-(\kappa+1)}(2\rho_{\kappa}(n)+1)) \in Q_r$, то в силу открытости Q_r с учетом (2.2.14) будет $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r \neq \emptyset$, что неверно.

Наконец, при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^{k-1}}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = \iota = k - 1$, если $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r = Q_{k,n}^1 \cap Q_r \neq \emptyset$, то, как и при выводе (2.2.16), получаем, что $Q_r \subset Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1$, т.е. ввиду (2.2.14) имеет место (2.2.13). Если же при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^{k-1}}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = \iota = k - 1$ пересечение $Q_{\kappa+1, \rho_{\kappa+1}(n)}^1 \cap Q_r = \emptyset$, то из (2.2.16) и (2.2.15) вытекает (2.2.17), которое, как и выше, влечет (2.2.13). \square

Отметим еще, что при $r \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} h_r(x) dx &= \int_{Q_r} (f(x) - (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} f(y) dy) \chi_{Q_r}(x) dx \\ &= \int_{Q_r} (f(x) - (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} f(y) dy) dx \\ &= \int_{Q_r} f(x) dx - (1/\text{mes } Q_r) \left(\int_{Q_r} f(y) dy \right) \int_{Q_r} dx \\ &= \int_{Q_r} f(x) dx - \int_{Q_r} f(y) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Возвращаясь к (2.2.12), благодаря (2.2.16), при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0, 2^{k-1}}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ получаем неравенство

$$|(Th_r)(x)| \leq c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{A}_1^{1, \iota}} \sum_{\kappa=0}^{\iota} 2^{\kappa} \left| \int_{Q_r} \phi_i(2^{\kappa}y - \rho_{\kappa}(n)) h_r(y) dy \right|. \quad (2.2.19)$$

Фиксируя для каждого $r \in \mathbb{N}$ точку $y_r \in Q_r$, при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = 0, \dots, \iota, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}$, с учетом (2.2.18) ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{Q_r} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| = \\
& \left| \int_{Q_r} (\phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \phi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))) h_r(y) + \phi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| = \\
& \left| \int_{Q_r} (\phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \phi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))) h_r(y) dy + \phi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n)) \int_{Q_r} h_r(y) dy \right| = \\
& \left| \int_{Q_r} (\phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \phi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))) h_r(y) dy \right| \leq \\
& \int_{Q_r} |\phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \phi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))| \cdot |h_r(y)| dy. \quad (2.2.20)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.2.13), (1.4.13), при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = 0, \dots, \iota, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,l}$, для $y \in Q_r$ имеем

$$\begin{aligned}
& |\phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) - \phi_i(2^\kappa y_r - \rho_\kappa(n))| = \\
& \left| (y - y_r) \frac{d}{dz} (\phi_i(2^\kappa z - \rho_\kappa(n))) \right|_{z=\theta y + (1-\theta)y_r} \leq \\
& |y - y_r| \sup_{z \in Q_r} \left| \frac{d}{dz} (\phi_i(2^\kappa z - \rho_\kappa(n))) \right| = \\
& |y - y_r| \sup_{z \in Q_r} \left| 2^\kappa \frac{d\phi_i}{du} (2^\kappa z - \rho_\kappa(n)) \right| \leq \\
& 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \sup_{z \in Q_r} \left| \frac{d\phi_i}{du} (2^\kappa z - \rho_\kappa(n)) \right| \leq \\
& 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \sup_{z \in (2^{-(\kappa+1)}(2\rho_\kappa(n) + \nu_\kappa) + 2^{-(\kappa+1)}I)} \left| \frac{d\phi_i}{du} (2^\kappa z - \rho_\kappa(n)) \right| = \\
& 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \sup_{u \in (2^{-1}\nu_\kappa + 2^{-1}I)} \left| \frac{d\phi_i}{du} (u) \right| = \\
& 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \sup_{u \in Q_{1,\nu_\kappa}^1} \left| \frac{d\phi_i}{du} (u) \right| \leq c_6(l) 2^\kappa (\text{diam } Q_r). \quad (2.2.21)
\end{aligned}$$

Соединяя (2.2.20) и (2.2.21), находим, что при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in$

$\mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset, \kappa = 0, \dots, \iota, i = 1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,\iota}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_r} \phi_i(2^\kappa y - \rho_\kappa(n)) h_r(y) dy \right| \\ & \leq \int_{Q_r} c_6 2^\kappa (\text{diam } Q_r) |h_r(y)| dy = c_6 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \int_{Q_r} |h_r(y)| dy. \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в (2.2.19), получаем, что при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ соблюдается неравенство

$$\begin{aligned} |(Th_r)(x)| & \leq c_5 \sum_{i=1, \dots, \mathfrak{R}_1^{1,\iota}} \sum_{\kappa=0}^{\iota} 2^\kappa c_6 2^\kappa (\text{diam } Q_r) \int_{Q_r} |h_r(y)| dy = \\ & c_7(l) (\text{diam } Q_r) \left(\int_{Q_r} |h_r(y)| dy \right) \sum_{\kappa=0}^{\iota} 2^{2\kappa} = \\ & c_7 (\text{diam } Q_r) \left(\int_{Q_r} |h_r(y)| dy \right) 2^{2\iota} \sum_{\kappa=0}^{\iota} 2^{-2(\iota-\kappa)} \leq \\ & c_7 (\text{diam } Q_r) \left(\int_{Q_r} |h_r(y)| dy \right) 2^{2\iota} \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-2s} = c_8 (\text{diam } Q_r) 2^{2\iota} \int_{Q_r} |h_r(y)| dy. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Заметим, что при $r \in \mathbb{N}$ в силу (2.1.12) верно неравенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} |h_r(y)| dy & = \int_{Q_r} |(f(y) - (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} f(z) dz) \chi_{Q_r}(y)| dy = \\ & \int_{Q_r} |f(y) - (1/\text{mes } Q_r) \int_{Q_r} f(z) dz| dy \leq \\ & \int_{Q_r} |f(y)| dy + (1/\text{mes } Q_r) \left| \int_{Q_r} f(z) dz \right| \int_{Q_r} dy \leq \\ & \int_{Q_r} |f(y)| dy + \int_{Q_r} |f(z)| dz = 2 \int_{Q_r} |f(y)| dy \leq c_9 \alpha \text{mes } Q_r. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Кроме того, благодаря (2.1.7), при $r \in \mathbb{N}$, для $y \in Q_r$ справедливо неравенство

$$\text{diam } Q_r \leq c_{10} \rho(y, F). \quad (2.2.24)$$

А также при $r \in \mathbb{N} : Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, для $x \in F \cap Q_{k,n}^1 \subset Q_{\iota, \rho_\iota(n)}^1$ и $y \in Q_r \subset Q_{\iota, \rho_\iota(n)}^1$ (см. (2.2.16)) соблюдается

неравенство $|x - y| \leq 2^{-\iota}$ или

$$2^\iota \leq |x - y|^{-1}. \quad (2.2.25)$$

Подставляя (2.2.23) – (2.2.25) в (2.2.22), заключаем, что при $r \in \mathbb{N}$: $Q_r \cap I \neq \emptyset, n \in \mathcal{N}_{0,2^k-1}^1 : F \cap Q_{k,n}^1 \neq \emptyset$, почти для всех $x \in F \cap Q_{k,n}^1$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |(Th_r)(x)| &\leq c_{11}(\text{diam } Q_r)2^{2\iota}\alpha \text{mes } Q_r = c_{11}\alpha(\text{diam } Q_r)2^{2\iota} \int_{Q_r} dy \\ &= c_{11}\alpha \int_{Q_r} (\text{diam } Q_r)2^{2\iota} dy \leq c_{12}\alpha \int_{Q_r} \rho(y, F)|x - y|^{-2} dy. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Из сказанного ясно, что при $r \in \mathbb{N}$ неравенство (2.2.26) выполняется почти для всех $x \in F \cap I$, а, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{F \cap I} |(Th_r)(x)| dx &\leq \int_{F \cap I} c_{12}\alpha \left(\int_{Q_r} \rho(y, F)|x - y|^{-2} dy \right) dx \\ &\leq c_{12}\alpha \int_F \int_{Q_r} \rho(y, F)|x - y|^{-2} dy dx. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Подставляя (2.2.27) в (2.2.11) и с учетом (2.1.5), (2.1.6) применяя (2.1.3), а затем (2.1.11), приходим к выводу, что при $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|Th\|_{L_1(F \cap I)} &\leq c_{12}\alpha \sum_{r=1}^m \int_F \int_{Q_r} \rho(y, F)|x - y|^{-2} dy dx + \\ &+ \int_{F \cap I} |(Th'_m)(x)| dx \leq c_{12}\alpha \int_F \left(\sum_{r=1}^m \int_{Q_r} \rho(y, F)|x - y|^{-2} dy \right) dx + \\ &+ \int_I |(Th'_m)(x)| dx = c_{12}\alpha \int_F \int_{\cup_{r=1}^m Q_r} \rho(y, F)|x - y|^{-2} dy dx + \\ &+ \int_I |(Th'_m)(x)| dx \leq c_{12}\alpha \int_F \int_W \rho(y, F)|x - y|^{-2} dy dx + \\ &+ \int_I |(Th'_m)(x)| dx \leq c_{13}\alpha \text{mes}(\mathbb{R} \setminus F) + \int_I |(Th'_m)(x)| dx = \\ &c_{13}\alpha \text{mes } W + \int_I |(Th'_m)(x)| dx \leq c_{14} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx + \int_I |(Th'_m)(x)| dx = \\ &c_{14}\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} + \int_I |(Th'_m)(x)| dx. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Принимая во внимание, что при $m \in \mathbb{N}$ в силу оценок (1.5.2) и (2.2.23), условия (2.1.5) и включения $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
& \int_I |(Th'_m)(x)| dx \\
&= \int_I \left| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(h'_m |_I))(x) \right| dx \leq \int_I \sum_{\kappa=1}^k |(\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(h'_m |_I))(x)| dx \\
&= \sum_{\kappa=1}^k \int_I |(\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(h'_m |_I))(x)| dx = \sum_{\kappa=1}^k \|\mathcal{E}_\kappa^{1,l}(h'_m |_I)\|_{L_1(I)} \\
&\leq \sum_{\kappa=1}^k c_{15} \|h'_m\|_{L_1(I)} = c_{15} k \|h'_m\|_{L_1(I)} \leq c_{15} k \|h'_m\|_{L_1(\mathbb{R})} = \\
&\quad c_{15} k \left\| \sum_{r=m+1}^{\infty} h_r \right\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq c_{15} k \sum_{r=m+1}^{\infty} \|h_r\|_{L_1(\mathbb{R})} = \\
&\quad c_{15} k \sum_{r=m+1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_r(x)| dx = c_{15} k \sum_{r=m+1}^{\infty} \int_{Q_r} |h_r(x)| dx \leq \\
&\quad c_{15} k \sum_{r=m+1}^{\infty} 2 \int_{Q_r} |f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

из (2.2.28) следует, что выполняется неравенство

$$\|Th\|_{L_1(F \cap I)} \leq c_{14} \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.2.29)$$

Подставляя (2.2.29) в (2.2.10), выводим неравенство

$$\text{mes}\{x \in F : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \leq (c_{16}/\alpha) \|f\|_{L_1(\mathbb{R})},$$

которое в соединении с (2.2.8), (2.2.9) дает оценку

$$\text{mes}\{x \in \mathbb{R} : |(Th)(x)| > \alpha/2\} \leq (c_{17}/\alpha) \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \quad (2.2.30)$$

Объединяя (2.2.6), (2.2.7) и (2.2.30), приходим к (2.2.4). Сопоставляя (2.2.2) – (2.2.4) с (2.1.13) – (2.1.15), заключаем, что при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}$, $1 < p < 2$ для $f \in L_p(\mathbb{R})$ согласно (2.1.16) верно неравенство

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq c_1 \|f\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

из которого следует (2.2.1) при $1 < p < 2$. Справедливость (2.2.1) при $p = 2$ установлена при выводе (2.2.3).

Теперь проверим соблюдение (2.2.1) при $2 < p < \infty$. В самом деле, при $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\} : \kappa = 1, \dots, k\}$, $2 < p < \infty$ для $f \in L_p(I)$, используя неравенство Гельдера, (1.4.8) и (2.2.1) при p' вместо p ($p' = p/(p-1) \in (1, 2)$), имеем

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} &= \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \int_I \left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right) \cdot g dx \\
&= \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \int_I \sum_{\kappa=1}^k (\sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \cdot g) dx = \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \int_I (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \cdot g dx \\
&= \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa \int_I f \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} g) dx = \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \int_I \sum_{\kappa=1}^k (\sigma_\kappa f \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} g)) dx \\
&= \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \int_I f \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} g) \right) dx \leq \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \|f\|_{L_p(I)} \cdot \left\| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} g) \right\|_{L_{p'}(I)} \\
&= \|f\|_{L_p(I)} \cdot \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} \left\| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} g) \right\|_{L_{p'}(I)} \\
&\leq \|f\|_{L_p(I)} \cdot \sup_{g \in B(L_{p'}(I))} c_1(l, p') \|g\|_{L_{p'}(I)} = c_1 \|f\|_{L_p(I)}. \square
\end{aligned}$$

Следствие

В условиях леммы 2.2.1 существует константа $c_{18}(l, p) > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ для любого набора чисел $\{\sigma_\kappa \in \{-1, 1\} : \kappa = 0, \dots, k\}$, для $f \in L_p(I)$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa=0}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} \leq c_{18} \|f\|_{L_p(I)}. \quad (2.2.31)$$

Доказательство.

В самом деле, в условиях леммы 2.2.1, используя (1.5.2) и (2.2.1), выводим

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{\kappa=0}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} &\leq \|\sigma_0 (\mathcal{E}_0^{1,l} f)\|_{L_p(I)} + \left\| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} \\
&= \|\mathcal{E}_0^{1,l} f\|_{L_p(I)} + \left\| \sum_{\kappa=1}^k \sigma_\kappa (\mathcal{E}_\kappa^{1,l} f) \right\|_{L_p(I)} \leq c_{18} \|f\|_{L_p(I)}. \square
\end{aligned}$$

На основании леммы 2.2.1 устанавливается

Теорема 2.2.3

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 < p < \infty$. Тогда существует константа $c_{19}(d, l, p) > 0$ такая, что для любого семейства чисел $\{\sigma_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ вида $\sigma_\kappa = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j$, где $\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, d$, для $f \in L_p(I^d)$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) \right\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \|f\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.2.32)$$

Доказательство.

Сначала покажем, что в условиях теоремы для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ при любом $k^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J$ и любых наборах чисел $\{\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, \kappa_j = 0, \dots, k_j\}$, $j \in J$, для $f \in L_p(I^d)$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa^J \in \mathbb{Z}_+^m(k^J)} \left(\prod_{j \in J} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})) \right) f \right\|_{L_p(I^d)} \leq \left(\prod_{j \in J} c_{18}(l_j, p) \right) \cdot \|f\|_{L_p(I^d)}, \quad (2.2.33)$$

где $m = \text{card } J$.

Доказательство (2.2.33) проведем по индукции относительно m . При $m = 1$, т.е. для $j = 1, \dots, d$, используя п. 2) леммы 1.3.1, теорему Фубини,

(1.3.1), (2.2.31), имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \cdot (V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j}))f \right\|_{L_p(I^d)}^p = \left\| (V_j(\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j}))f \right\|_{L_p(I^d)}^p \\
& = \int_{I^d} |(V_j(\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j}))f|^p dx \\
& = \int_{I^{d-1}} \int_I |((V_j(\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j}))f)(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_d)|^p \\
& \quad \times dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\
& = \int_{I^{d-1}} \int_I |((\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})f)(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d))(x_j)|^p \\
& \quad \times dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\
& = \int_{I^{d-1}} \left\| (\sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j \mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j})f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \right\|_{L_p(I)}^p \\
& \quad \times dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\
& \leq \int_{I^{d-1}} (c_{18}(l_j, p)) \|f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d)\|_{L_p(I)}^p \\
& \quad \times dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\
& = (c_{18}(l_j, p))^p \int_{I^{d-1}} \int_I |f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_d)|^p \\
& \quad \times dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\
& = (c_{18}(l_j, p))^p \int_{I^d} |f(x)|^p dx = (c_{18}(l_j, p)) \|f\|_{L_p(I^d)}^p,
\end{aligned}$$

откуда

$$\left\| \sum_{\kappa_j=0}^{k_j} \sigma_{\kappa_j}^j (V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1,l_j}))f \right\|_{L_p(I^d)} \leq c_{18}(l_j, p) \|f\|_{L_p(I^d)}, \quad (2.2.34)$$

что совпадает с (2.2.33) при $m = 1, J = \{j\}$.

Предположим теперь, что при некотором $m : 1 \leq m \leq d - 1$, оценка (2.2.33) имеет место для любого множества $J \subset \{1, \dots, d\} : \text{card } J = m$, при любом $k^J \in (\mathbb{Z}_+^d)^J$, любых наборах чисел $\{\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, \kappa_j = 0, \dots, k_j\}, j \in J$, и любой функции $f \in L_p(I^d)$. Покажем, что тогда нера-

венство (2.2.33) справедливо при $m + 1$ вместо m для любого множества $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, d\}$ вместо J , у которого $\text{card } \mathcal{J} = m + 1$, при любом $k^{\mathcal{J}} \in (\mathbb{Z}_+^d)^{\mathcal{J}}$, любых наборах чисел $\{\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, \kappa_j = 0, \dots, k_j\}, j \in \mathcal{J}$, и любой функции $f \in L_p(I^d)$. Представляя множество $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, d\} : \text{card } \mathcal{J} = m + 1$, в виде $\mathcal{J} = J \cup \{i\}, i \notin J$, с учетом (1.3.2) в силу (2.2.34) и предположения индукции получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\kappa^{\mathcal{J}} \in \mathbb{Z}_+^{m+1}(k^{\mathcal{J}})} \left(\prod_{j \in \mathcal{J}} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1, l_j})) \right) f \right\|_{L_p(I^d)} \\
&= \left\| \sum_{(\kappa_i, \kappa^J) : \kappa_i = 0, \dots, k_i, \kappa^J \in \mathbb{Z}_+^m(k^J)} \sigma_{\kappa_i}^i (V_i(\mathcal{E}_{\kappa_i}^{1, l_i})) \left(\left(\prod_{j \in J} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1, l_j})) \right) f \right) \right\|_{L_p(I^d)} \\
&= \left\| \sum_{\kappa_i = 0}^{k_i} \sigma_{\kappa_i}^i (V_i(\mathcal{E}_{\kappa_i}^{1, l_i})) \left(\sum_{\kappa^J \in \mathbb{Z}_+^m(k^J)} \left(\prod_{j \in J} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1, l_j})) \right) f \right) \right\|_{L_p(I^d)} \\
&\leq c_{18}(l_i, p) \left\| \sum_{\kappa^J \in \mathbb{Z}_+^m(k^J)} \left(\prod_{j \in J} (\sigma_{\kappa_j}^j V_j(\mathcal{E}_{\kappa_j}^{1, l_j})) \right) f \right\|_{L_p(I^d)} \\
&\leq c_{18}(l_i, p) \left(\prod_{j \in J} c_{18}(l_j, p) \right) \cdot \|f\|_{L_p(I^d)} = \left(\prod_{j \in \mathcal{J}} c_{18}(l_j, p) \right) \cdot \|f\|_{L_p(I^d)},
\end{aligned}$$

что завершает вывод (2.2.33).

В частности, из (2.2.33) при $m = d$ ввиду (1.4.4) получаем, что в условиях теоремы при любом $k \in \mathbb{Z}_+^d$ соблюдается неравенство

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_{\kappa} \cdot (\mathcal{E}_{\kappa}^{d, l} f) \right\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \|f\|_{L_p(I^d)}, \sigma_{\kappa} = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j, \\
& \text{где } \sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, \kappa_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \dots, d, f \in L_p(I^d), c_{19} = \prod_{j=1}^d c_{18}(l_j, p).
\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Теперь убедимся в справедливости (2.2.32). Для произвольного семейства чисел $\{\sigma_{\kappa} = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j : \sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, j = 1, \dots, d, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, функции $f \in L_p(I^d)$ рассмотрим последовательность

$$\left\{ \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k \epsilon)} \sigma_{\kappa} \cdot (\mathcal{E}_{\kappa}^{d, l} f) \right) \in L_p(I^d), k \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

и, принимая во внимание (2.2.35), секвенциальную компактность шара $B(L_p(I^d))$ относительно $*$ -слабой топологии в пространстве $L_p(I^d) =$

$(L_{p'}(I^d))^*$, выберем подпоследовательность

$$\left\{ \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) : k_n < k_{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

и функцию $F \in L_p(I^d)$, обладающие тем свойством, что для любой функции $g \in L_{p'}(I^d)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) \right) g dx = \int_{I^d} F g dx. \quad (2.2.36)$$

Заметим, что при любом $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, благодаря (1.4.8), (2.2.36), (1.4.6), для $g \in L_{p'}(I^d)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_{I^d} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} F) \cdot g dx &= \int_{I^d} F \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} g) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_{\kappa'} \cdot (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} f) \right) (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} g) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_{\kappa'} \cdot (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} f) \right) \cdot g dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k_n \epsilon)} \sigma_{\kappa'} \cdot \mathcal{E}_\kappa^{d,l} (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} f) \right) g dx = \int_{I^d} \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) g dx, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\mathcal{E}_\kappa^{d,l} F = \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f). \quad (2.2.37)$$

Учитывая (2.2.37), (1.2.1), (1.5.1), заключаем, что

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} F) = E_k^{d,l} F$$

сходится к F в $L_p(I^d)$ при $\mathbf{m}(k) \rightarrow \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $\mathbf{m}(k) \rightarrow \infty$ в неравенстве (2.2.35), приходим к (2.2.32). \square

Следствие

В условиях теоремы 2.2.3 для любого семейства чисел $\{\sigma_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ вида $\sigma_\kappa = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j$, где $\sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, d$, и любой функции $f \in L_p(I^d)$ соблюдается неравенство

$$\|f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) \right\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.2.38)$$

Доказательство.

Сначала покажем, что при любом $k \in \mathbb{Z}_+^d$, любом наборе чисел $\{\sigma_\kappa = \prod_{j=1}^d \sigma_{\kappa_j}^j : \sigma_{\kappa_j}^j \in \{-1, 1\}, j = 1, \dots, d, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)\}$, для $f \in L_p(I^d)$ справедливо неравенство

$$\|E_k^{d,l} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{19} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_\kappa \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) \right\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.2.39)$$

В самом деле, ввиду (1.4.6), (1.2.1) имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_\kappa \cdot \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \right)^2 f &= \left(\sum_{\kappa, \kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_\kappa \sigma_{\kappa'} \cdot \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} \right) f \\ &= \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_\kappa^2 \cdot \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \right) f = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \mathcal{E}_\kappa^{d,l} f = E_k^{d,l} f. \end{aligned}$$

Откуда, применяя (2.2.35), выводим

$$\begin{aligned} \|E_k^{d,l} f\|_{L_p(I^d)} &= \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_\kappa \cdot \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \right\|_{L_p(I^d)}^2 f \\ &= \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_\kappa \cdot \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_{\kappa'} \cdot (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} f) \right) \right\|_{L_p(I^d)} \\ &\leq c_{19} \left\| \sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \sigma_{\kappa'} \cdot (\mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} f) \right\|_{L_p(I^d)}. \end{aligned}$$

Как видно из (2.2.32) и (1.5.1), в неравенстве (2.2.39) можно перейти к пределу при $\mathbf{m}(k) \rightarrow \infty$, в результате чего получим (2.2.38). \square

С помощью теоремы 2.2.3 и следствия из нее, опираясь на схему доказательства теоремы Литтлвуда-Пэли, приведенную в [3] для операторов взятия частных сумм кратных рядов Фурье, устанавливается

Теорема 2.2.4

В условиях теоремы 2.2.3 существуют константы $c_{20}(d, l, p) > 0$, $c_{21}(d, l, p) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ выполняются неравенства

$$c_{20} \|f\|_{L_p(I^d)} \leq \left(\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \leq c_{21} \|f\|_{L_p(I^d)}. \quad (2.2.40)$$

Доказательство.

Рассмотрим систему Радемахера, состоящую из функций

$$\omega_\kappa(t) = \text{sign} \sin(2^{\kappa+1} \pi t), t \in I, \kappa \in \mathbb{Z}_+,$$

и определим семейство функций $\omega_\kappa^d, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, полагая

$$\omega_\kappa^d(t) = \prod_{j=1}^d \omega_{\kappa_j}(t_j), t \in I^d.$$

Как известно (см., например, [3]), существуют константы $c_{22}(d, p) > 0, c_{23}(d, p) > 0$ такие, что при любом $k \in \mathbb{Z}_+^d$ для любого набора чисел $\{a_\kappa \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)\}$ имеет место неравенство

$$c_{22}(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} a_\kappa^2)^{1/2} \leq \|\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} a_\kappa \omega_\kappa^d(\cdot)\|_{L_p(I^d)} \leq c_{23}(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} a_\kappa^2)^{1/2}. \quad (2.2.41)$$

Для $f \in L_p(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+^d$, используя (2.2.39), теорему Фубини, (2.2.41), выводим

$$\begin{aligned} \|E_k^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^p &= \int_{I^d} \|E_k^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^p dt \leq \int_{I^d} (c_{19} \|\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \omega_\kappa^d(t) \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)\|_{L_p(I^d)})^p dt \\ &= (c_{19})^p \int_{I^d} \int_{I^d} |\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \omega_\kappa^d(t) \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x)|^p dx dt \\ &= (c_{19})^p \int_{I^d} \int_{I^d} |\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \omega_\kappa^d(t) \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x)|^p dt dx \\ &= (c_{19})^p \int_{I^d} \|\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x) \cdot \omega_\kappa^d(\cdot)\|_{L_p(I^d)}^p dx \\ &\leq (c_{19})^p \int_{I^d} (c_{23}(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2)^{1/2})^p dx \\ &= (c_{24})^p \int_{I^d} (\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2)^{p/2} dx, \quad (2.2.42) \end{aligned}$$

и, пользуясь (2.2.41), теоремой Фубини, (2.2.35), получаем

$$\begin{aligned}
\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2} dx &\leq \int_{I^d} (c_{25} \| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x) \cdot \omega_\kappa^d(\cdot) \|_{L_p(I^d)})^p dx \\
&= (c_{25})^p \int_{I^d} \int_{I^d} \left| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \omega_\kappa^d(t) \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x) \right|^p dt dx \\
&= (c_{25})^p \int_{I^d} \int_{I^d} \left| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \omega_\kappa^d(t) \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x) \right|^p dx dt \\
&= (c_{25})^p \int_{I^d} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \omega_\kappa^d(t) \cdot (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f) \right\|_{L_p(I^d)}^p dt \\
&\leq (c_{25})^p \int_{I^d} (c_{19} \|f\|_{L_p(I^d)})^p dt = (c_{21})^p \|f\|_{L_p(I^d)}^p,
\end{aligned}$$

откуда, в частности, имеем

$$\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2} dx \leq (c_{21})^p \|f\|_{L_p(I^d)}^p, n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.2.43)$$

Для получения второго неравенства в (2.2.40) достаточно применить теорему Леви о предельном переходе под знаком интеграла к монотонно возрастающей последовательности функций $\{(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2)^{p/2}, n \in \mathbb{Z}_+\}$, принимая во внимание (2.2.43) и учитывая, что почти для всех $x \in I^d$ предел

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2} \\
= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2} = \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что при $k \in \mathbb{Z}_+^d$ имеет место соотношение

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathfrak{m}(k)\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\mathfrak{M}(k)\epsilon)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2, x \in I^d.$$

ввиду сказанного и на основании (1.5.1) переходя к пределу в (2.2.42) при $\mathfrak{m}(k) \rightarrow \infty$, приходим к первому неравенству в (2.2.40). \square

Из теоремы 2.2.4, используя соображения, приведенные в [2] для аналогичного утверждения об операторах взятия частных сумм ряда Фурье, выводится

Следствие

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$. Тогда существует константа $c_{26}(d, l, p) > 0$ такая, что если для $f \in L_1(I^d)$ ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^{p^*}$ сходится, где $p^* = \min(2, p)$, то $f \in L_p(I^d)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{26} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^{p^*} \right)^{1/p^*}. \quad (2.2.44)$$

Доказательство.

В условиях теоремы, с помощью неравенства треугольника для нормы в пространстве $L_{p/2}(I^d)$ при $p > 2$, и неравенства Гельдера с показателем $p/2$ при $1 < p \leq 2$, из (2.2.42) выводим

$$\begin{aligned} \|E_k^{d,l} f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_{24} \cdot \left(\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)^2 \right\|_{L_{p/2}(I^d)} \right)^{1/2} \leq \\ &c_{24} \cdot \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \|(\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)^2\|_{L_{p/2}(I^d)} \right)^{1/2} = c_{24} \cdot \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^2 \right)^{1/2}, \\ &f \in L_p(I^d), k \in \mathbb{Z}_+^d, p > 2, \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

и

$$\begin{aligned} \|E_k^{d,l} f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_{24} \left(\int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} ((\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x))^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \leq \\ &c_{24} \left(\int_{I^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} |(\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f)(x)|^p dx \right)^{1/p} = c_{24} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^p \right)^{1/p}, \\ &f \in L_p(I^d), k \in \mathbb{Z}_+^d, 1 < p \leq 2. \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

Заметим, что на самом деле неравенства (2.2.45) и (2.2.46) имеют место для любой функции $f \in L_1(I^d)$.

Действительно, если $k \in \mathbb{Z}_+^d$ и $f \in L_1(I^d)$, то применяя (2.2.45) в случае $p > 2$, соответственно (2.2.46) в случае $1 < p \leq 2$, к функции $E_k^{d,l} f \in L_\infty(I^d) \subset L_p(I^d)$ и учитывая (1.4.5) и то обстоятельство, что вследствие (1.2.1) и (1.4.6) соблюдаются равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\kappa^{d,l} E_k^{d,l} f &= \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} f \right) = \sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(k)} \mathcal{E}_\kappa^{d,l} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d,l} f \\ &= \mathcal{E}_\kappa^{d,l} f, \text{ при } \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k), f \in L_1(I^d), k \in \mathbb{Z}_+^d, \end{aligned}$$

получаем, что (2.2.45), соответственно (2.2.46), справедливо для $f \in L_1(I^d)$.

Отметим еще, что для любого семейства неотрицательных чисел $\{a_\kappa \in \mathbb{R} : a_\kappa \geq 0, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\mathfrak{m}(k) \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} a_\kappa = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} a_\kappa,$$

поскольку для любых $k, k' \in \mathbb{Z}_+^d : \mathfrak{m}(k) \geq \mathfrak{M}(k')$, соблюдается неравенство

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k)} a_\kappa \geq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(k')} a_\kappa.$$

Пусть теперь $f \in L_1(I^d)$ и ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^{p^*}$ сходится. Тогда, с учетом замечаний, на основании (2.2.45), (2.2.46) заключаем, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\|E_{k\epsilon}^{d,l} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{26} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l} f\|_{L_p(I^d)}^{p^*} \right)^{1/p^*} < \infty. \quad (2.2.47)$$

Причем, в силу (1.5.1) последовательность функций $\{E_{k\epsilon}^{d,l} f, k \in \mathbb{Z}_+\}$ сходится к f в $L_1(I^d)$, а, следовательно, $\{E_{k\epsilon}^{d,l} f\}$ сходится к f по мере. Поэтому существует подпоследовательность $\{E_{k_n\epsilon}^{d,l} f, n \in \mathbb{N}\}$, которая сходится к f почти всюду на I^d . Применяя теорему Фату о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности функций $\{|E_{k_n\epsilon}^{d,l} f|^p, n \in \mathbb{N}\}$, почти всюду на I^d сходящейся к $|f|^p$, с учетом (2.2.47), приходим к выводу, что $f \in L_p(I^d)$ и соблюдается (2.2.44) при $1 < p < \infty$. Справедливость (2.2.44) при $p = 1$ вытекает из (1.5.3) и неравенства треугольника для нормы в $L_1(I^d)$. \square

В заключение отметим, что утверждения аналогичные тем, что установлены в этом пункте, получены автором для ортопроекторов на взаимно ортогональные подпространства, соответствующие кратно-масштабному анализу типа Добеши.

§3. Колмогоровский n -поперечник классов функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гельдера

3.1. В этом пункте определим классы функций, рассматриваемые в этом параграфе, и приведем сведения, необходимые для вывода оценки их поперечников.

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и векторов $h \in \mathbb{R}^d$ и $l \in \mathbb{Z}_+^d$ через D_h^l обозначим множество

$$\begin{aligned} D_h^l &= (\dots (D_{l_d h_d e_d})_{l_{d-1} h_{d-1} e_{d-1}} \dots)_{l_1 h_1 e_1} = \{x \in D : x + t l h \in D \forall t \in \bar{I}^d\} = \\ &= \{x \in D : (x + \sum_{j \in f(l)} t_j l_j h_j e_j) \in D \forall t^{f(l)} \in (\bar{I}^d)^{f(l)}\}. \end{aligned}$$

Пусть $d \in \mathbb{N}$, D – область в \mathbb{R}^d и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для $f \in L_p(D)$, $h \in \mathbb{R}^d$ и $l \in \mathbb{Z}_+^d$ определим в D_h^l смешанную разность функции f порядка l , соответствующую вектору h , равенством

$$\begin{aligned} (\Delta_h^l f)(x) &= ((\prod_{j=1}^d \Delta_{h_j e_j}^{l_j}) f)(x) = ((\prod_{j \in f(l)} \Delta_{h_j e_j}^{l_j}) f)(x) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d(l)} (-\mathbf{e})^{l-k} C_l^k f(x + k h), \quad x \in D_h^l, \end{aligned}$$

где $C_l^k = \prod_{j=1}^d C_{l_j}^{k_j}$, $k \in \mathbb{Z}_+^d(l)$.

Имея в виду, что для $f \in L_p(D)$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ и векторов $h, h' \in \mathbb{R}^d$: $h^{f(l)} = (h')^{f(l)}$, соблюдается соотношение

$$\|\Delta_h^l f\|_{L_p(D_h^l)} = \|\Delta_{h'}^l f\|_{L_p(D_{h'}^l)},$$

определим для функции f смешанный модуль непрерывности в $L_p(D)$ порядка l равенством

$$\Omega^l(f, t^{f(l)})_{L_p(D)} = \sup_{\{h \in \mathbb{R}^d : h^{f(l)} \in t^{f(l)}(B^d)^{f(l)}\}} \text{vrai} \|\Delta_h^l f\|_{L_p(D_h^l)}, t^{f(l)} \in (\mathbb{R}_+^d)^{f(l)}.$$

Теперь определим классы функций, изучаемые в этом параграфе (см. [10], [11]).

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p \leq \infty$ и D – область в \mathbb{R}^d . Тогда зададим вектор $l = l(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, полагая $l_j = \min\{m \in \mathbb{N} : \alpha_j < m\}$, $j = 1, \dots, d$, и обозначим через $S_p^\alpha H(D) (\mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(D))$ множество всех функций $f \in L_p(D)$, обладающих тем свойством, что для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ выполняется неравенство

$$\sup_{t^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J} (t^J)^{-\alpha^J} \Omega^{l_{\chi_J}}(f, t^J)_{L_p(D)} = \sup_{t^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J} (\prod_{j \in J} t_j^{-\alpha_j}) \Omega^{l_{\chi_J}}(f, t^{f(l_{\chi_J})})_{L_p(D)} < \infty (\leq 1).$$

Пусть α, p, D и $l = l(\alpha)$ – те же, что и выше, и $\theta \in \mathbb{R} : 1 \leq \theta < \infty$. Тогда обозначим через $S_{p,\theta}^\alpha B(D) (\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(D))$ множество всех функций $f \in L_p(D)$,

которые для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} & \left(\int_{(\mathbb{R}_+^d)^J} (t^J)^{-\epsilon^J - \theta \alpha^J} (\Omega^{l\chi_J}(f, t^J)_{L_p(D)})^\theta dt^J \right)^{1/\theta} = \\ & \left(\int_{(\mathbb{R}_+^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-1 - \theta \alpha_j} \right) (\Omega^{l\chi_J}(f, t^{f(l\chi_J)})_{L_p(D)})^\theta \prod_{j \in J} dt_j \right)^{1/\theta} < \infty (\leq 1). \end{aligned}$$

При $\theta = \infty$ положим $S_{p,\infty}^\alpha B(D) = S_p^\alpha H(D)$, $\mathcal{S}_{p,\infty}^\alpha \mathcal{B}(D) = \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(D)$.

Как известно (см., например, [8]), имеет место включение

$$\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(D) \subset c_1(\alpha) \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(D), \quad (3.1.1)$$

где $c_1(\alpha) = \prod_{j=1}^d 2^{1+\alpha_j}$.

В [5], [8] установлена справедливость леммы 3.1.1 и теоремы 3.1.2.

Лемма 3.1.1

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда существуют константы $c_2(d, l, p, q) > 0$ и $c_3(d) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)} & \leq c_2 \left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j(p^{-1} + (p^{-1} - q^{-1})_+)} \right) \left(\int_{(c_3 2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa)}} \right. \\ & \left. \int_{(I^d)_\xi^{l\chi_{f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l\chi_{f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

где $t_+ = \frac{1}{2}(t + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1.2

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда существует константа $c_4(d, \alpha, p, q) > 0$ такая, что для любой функции $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ соблюдается неравенство

$$\|\mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_4 2^{-(\kappa, \alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ + \epsilon)} \quad (3.1.3)$$

и при выполнении условия

$$\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ + \epsilon > 0 \quad (3.1.4)$$

в $L_q(I^d)$ имеет место равенство (1.5.3).

3.2. В этом пункте напомним некоторые сведения о поперечниках (см. [12]).

Пусть C – подмножество банахова пространства X и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда n -поперечником по Колмогорову множества C в пространстве X называется величина

$$d_n(C, X) = \inf_{M \in \mathcal{M}_n(X)} \sup_{x \in C} \inf_{y \in M} \|x - y\|_X,$$

где $\mathcal{M}_n(X)$ – совокупность всех плоскостей M в X , у которых $\dim M \leq n$.

Отметим, что для симметричного (относительно нуля) множества C значение величины $d_n(C, X)$ не изменится, если вместо совокупности всех плоскостей размерности не больше n в определении $d_n(C, X)$ рассматривать лишь совокупность тех из них, которые проходят через 0, т.е. линейных подпространств.

Предложение 3.2.1

Пусть $U : X \mapsto Y$ – непрерывное линейное отображение банахова пространства X в банахово пространство Y и $C \subset X$ – некоторое множество. Тогда при $n \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$d_n(U(C), Y) \leq \|U\|_{\mathcal{B}(X, Y)} d_n(C, X). \quad (3.2.1)$$

Напомним, что при $1 \leq p, q \leq \infty, n \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\|x\|_{l_q^n} \leq n^{(1/q - 1/p)_+} \|x\|_{l_p^n}. \quad (3.2.2)$$

Как показано в [13], существует константа $c_1 > 0$ такая, что для $n, m \in \mathbb{N} : n \leq m$, имеет место оценка

$$d_n(B(l_2^m), l_\infty^m) \leq c_1 n^{-1/2} (1 + \log(m/n))^{3/2}. \quad (3.2.3)$$

3.3. В этом пункте с использованием следствия из теоремы 2.2.4 проводится оценка сверху колмогоровского n -поперечника класса $\mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ в пространстве $L_q(I^d)$. Отметим, что вывод этой оценки имеет как сходство, так и отличия от вывода подобной оценки для периодических функций в [2].

Лемма 3.3.1

Пусть $d \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}_+^d, l = l(\alpha), 1 \leq \theta \leq \infty, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q < \infty$ и выполнено условие (3.1.4). Пусть еще $J = \{j = 1, \dots, d : \alpha_j = \mathbf{m}(\alpha)\}, \mathbf{c} = \mathbf{c}(\alpha) = \text{card } J$, а вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \beta_j &= 1, \text{ для } j \in J; \beta_j > 1, \beta_j^{-1}(\alpha_j - (p^{-1} - q^{-1})_+) > \mathbf{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathbf{e}) \\ &\text{для } j \in J' = \{1, \dots, d\} \setminus J. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Тогда существует константа $c_1(d, \alpha, \theta, p, q, \beta) > 0$ такая, что для $f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при любом $r \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \leq c_1 \begin{cases} 2^{-m(\alpha - (1/p - 1/q)\epsilon)r} r^{(\epsilon(\alpha) - 1)(1/q^* - 1/\theta)_+}, & \text{при } p \leq q; \\ 2^{-m(\alpha)r} r^{(\epsilon(\alpha) - 1)(1/p^* - 1/\theta)_+}, & \text{при } q < p, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

где $q^* = \min(2, q)$, $p^* = \min(2, p)$.

Доказательство.

Сначала установим справедливость (3.3.2) при $p \leq q$. Принимая во внимание (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4), в соответствии с (2.2.44), (1.4.6) для $f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при $r \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} &\leq \\ c_2 \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d} \left\| \mathcal{E}_{\kappa'}^{d, l-\epsilon} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right) \right\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} &= \\ c_2 \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d, l-\epsilon} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} &= \\ c_2 \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \left\| \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Далее, для $f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, используя (3.1.2), выводим

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} &\leq c_3 \left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j(p^{-1} + (p^{-1} - q^{-1})_+)} \right) \left(\int_{(c_4 2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa)}} \int_{(I^d)_\xi}^{l\chi_{f(\kappa)}} \right. \\ &\quad \left. |\Delta_\xi^{l\chi_{f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p} \leq c_5 2^{(\kappa, (1/p - 1/q)_+ \epsilon)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Учитывая (3.3.4), для $f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ получаем

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \left\| \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} \\ &\leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} (c_5 2^{(\kappa, (1/p - 1/q)_+ \epsilon)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*} \\ &= c_5 \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*(\kappa, \alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon)} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

При оценке правой части (3.3.5) рассмотрим два случая. В первом случае, когда $\theta > q^*$, применяя неравенство Гельдера с показателем $\theta/q^* > 1$, для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ находим, что

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*(\kappa, \alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon)} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
& \leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^* \theta(\kappa, \alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon) / (\theta - q^*)} \right)^{1/q^* - 1/\theta} \\
& \quad \times \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta}. \quad (3.3.6)
\end{aligned}$$

Согласно (1.2.3), с учетом (3.3.1) получаем, что

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^* \theta(\kappa, \alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon) / (\theta - q^*)} \right)^{1/q^* - 1/\theta} \\
& \leq (c_6 2^{-m(q^* \theta(\theta - q^*)^{-1} \beta^{-1}(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon)) r} r^{c(q^* \theta(\theta - q^*)^{-1} \beta^{-1}(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon) - 1)})^{1/q^* - 1/\theta} \\
& = (c_6 2^{-q^* \theta(\theta - q^*)^{-1} m(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon) r} r^{c(\alpha) - 1})^{1/q^* - 1/\theta} \\
& = c_7 2^{-m(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon) r} r^{(c(\alpha) - 1)(1/q^* - 1/\theta)}. \quad (3.3.7)
\end{aligned}$$

Кроме того, для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ выводим

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \\
& \leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \\
& = \left(\sum_{\mathcal{J} \subset \mathcal{N}_{1,d}^1 : \mathcal{J} \neq \emptyset} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : f(\kappa) = \mathcal{J}} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{\mathcal{J}}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{\mathcal{J}})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \\
& = \left(\sum_{\mathcal{J} \subset \mathcal{N}_{1,d}^1 : \mathcal{J} \neq \emptyset} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : f(\kappa) = \mathcal{J}} (2^{(\kappa^{\mathcal{J}}, \alpha^{\mathcal{J}})} \Omega^{l\chi_{\mathcal{J}}}(f, c_4 2^{-\kappa^{\mathcal{J}}})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \\
& = \left(\sum_{\mathcal{J} \subset \mathcal{N}_{1,d}^1 : \mathcal{J} \neq \emptyset} \sum_{\kappa^{\mathcal{J}} \in (\mathbb{N}^d)^{\mathcal{J}}} \int_{2^{-\kappa^{\mathcal{J}}} + 2^{-\kappa^{\mathcal{J}}}(I^d)^{\mathcal{J}}} 2^{(\kappa^{\mathcal{J}}, \epsilon^{\mathcal{J}}) + \theta(\kappa^{\mathcal{J}}, \alpha^{\mathcal{J}})} (\Omega^{l\chi_{\mathcal{J}}}(f, c_4 2^{-\kappa^{\mathcal{J}}})_{L_p(I^d)})^\theta dt^{\mathcal{J}} \right)^{1/\theta} \\
& \leq \left(\sum_{\mathcal{J} \subset \mathcal{N}_{1,d}^1 : \mathcal{J} \neq \emptyset} \sum_{\kappa^{\mathcal{J}} \in (\mathbb{N}^d)^{\mathcal{J}}} \int_{2^{-\kappa^{\mathcal{J}}} + 2^{-\kappa^{\mathcal{J}}}(I^d)^{\mathcal{J}}} c_8(t^{\mathcal{J}})^{-\epsilon^{\mathcal{J}} - \theta\alpha^{\mathcal{J}}} (\Omega^{l\chi_{\mathcal{J}}}(f, c_4 t^{\mathcal{J}})_{L_p(I^d)})^\theta dt^{\mathcal{J}} \right)^{1/\theta} \\
& \leq \left(\sum_{\mathcal{J} \subset \mathcal{N}_{1,d}^1 : \mathcal{J} \neq \emptyset} \int_{(I^d)^{\mathcal{J}}} c_8(t^{\mathcal{J}})^{-\epsilon^{\mathcal{J}} - \theta\alpha^{\mathcal{J}}} (\Omega^{l\chi_{\mathcal{J}}}(f, c_4 t^{\mathcal{J}})_{L_p(I^d)})^\theta dt^{\mathcal{J}} \right)^{1/\theta} \\
& \leq (c_8 \sum_{\mathcal{J} \subset \mathcal{N}_{1,d}^1 : \mathcal{J} \neq \emptyset} \int_{(\mathbb{R}_+^d)^{\mathcal{J}}} (t^{\mathcal{J}})^{-\epsilon^{\mathcal{J}} - \theta\alpha^{\mathcal{J}}} (\Omega^{l\chi_{\mathcal{J}}}(f, c_4 t^{\mathcal{J}})_{L_p(I^d)})^\theta dt^{\mathcal{J}})^{1/\theta} \leq c_9.
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Соединяя (3.3.5) – (3.3.8), для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ при $\theta > q^*$ приходим к неравенству

$$\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq c_{10} 2^{-m(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon) r} r^{(c(\alpha) - 1)(1/q^* - 1/\theta)_+}. \tag{3.3.9}$$

Оценивая правую часть (3.3.5) при $\theta \leq q^*$, для $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ в силу

(3.3.1) и неравенства Гельдера с показателем $\theta/q^* \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*(\kappa, \alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon)} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&= \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^*(\kappa, \beta^{-1}(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon))} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&\leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^* m(\beta^{-1}(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon))(\kappa, \beta)} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&\leq \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} 2^{-q^* m(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon)r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&= 2^{-m(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon)r} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&\leq 2^{-m(\alpha - (1/p - 1/q)_+ \epsilon)r} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_{f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta}.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Подставляя (3.3.8) в (3.3.10) и соединяя с (3.3.5), для $f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ получаем (3.3.9) при $\theta \leq q^*$.

Объединяя (3.3.3) с (3.3.9), приходим к (3.3.2) при $p \leq q$.

Для получения (3.3.2) в случае $q < p$ достаточно заметить, что в этом случае справедлива оценка

$$\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \leq \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_p(I^d)}, \quad f \in \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d),$$

и применить (3.3.2) при $q = p$. \square

Лемма 3.3.2

Пусть выполнены условия леммы 3.3.1 и $p \leq q$. Тогда для $C = \mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ и $X = L_q(I^d)$ существует константа $c_{11}(d, \alpha, \theta, p, q, \beta) > 0$ такая, что для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого набора чисел $\{n_\kappa \in \mathbb{Z}_+ : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0\}$, подчиненных условию

$$n \geq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0} n_\kappa, \tag{3.3.11}$$

можно построить линейное подпространство $M \subset X$, размерность кото-

того $\dim M \leq n$, а для $f \in C$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \inf_{g \in M} \|f - g\|_{L_q(I^d)} &\leq c_{11} \left(\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{(\kappa, (p^{-1}-q^{-1})\epsilon)}) \right. \right. \\ &\quad \times d_{n_\kappa}(B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}}, l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}}) \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^{q^*})^{1/q^*} \\ &\quad \left. + 2^{-(r+j_0)m(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})_+\epsilon)} (r+j_0)^{(\epsilon-1)(1/q^*-1/\theta)_+} \right). \quad (3.3.12) \end{aligned}$$

Доказательство.

Пусть $n, r \in \mathbb{N}, j_0 \in \mathbb{Z}_+$ и набор чисел $\{n_\kappa \in \mathbb{Z}_+ : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0\}$ удовлетворяют условию (3.3.11). Для каждого $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}$ фиксируем линейное подпространство $M_\kappa \subset \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}$, для которого $\dim M_\kappa \leq n_\kappa$ и

$$\sup_{f \in B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}} \inf_{g \in M_\kappa} \|f - g\|_{L_q(I^d)} < 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon} \cap L_q(I^d)) > 0,$$

а, следовательно, для каждого $f \in B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}$ выполняется неравенство

$$\inf_{g \in M_\kappa} \|f - g\|_{L_q(I^d)} < 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon} \cap L_q(I^d)).$$

А для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa \geq \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}$, положим $M_\kappa = \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}$.

Учитывая сказанное, для $f \in C$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}$, выберем функцию $g_\kappa = g_\kappa(f) \in M_\kappa$ такую, что

$$\begin{aligned} &\|(1/\|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)}) \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - g_\kappa\|_{L_q(I^d)} \\ &< 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon} \cap L_q(I^d)), \text{ если } \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \neq 0; \\ &g_\kappa = 0, \text{ если } \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f = 0, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa\|_{L_q(I^d)} \\ &\leq \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} 2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon} \cap L_q(I^d)). \quad (3.3.13) \end{aligned}$$

Тогда получаем, что для $f \in C$ и подпространства

$$M = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0} M_\kappa$$

ввиду (3.1.1), (3.1.4), (1.5.3) соблюдается неравенство

$$\begin{aligned}
\inf_{g \in M} \|f - g\|_{L_q(I^d)} &\leq \left\| f - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa \geq \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa \right\|_{L_q(I^d)} \\
&= \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r+j_0} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \\
&\leq \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) \right\|_{L_q(I^d)} \\
&\quad + \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r+j_0} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)}. \quad (3.3.14)
\end{aligned}$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (3.3.14), на основании (2.2.44), (1.4.7), (1.4.6), (3.3.13) заключаем, что для $f \in C$ соблюдается неравенство

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) \right\|_{L_q(I^d)} \\
&\leq c_{12} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_{\kappa'}^{d, l-\epsilon} (\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa))\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&= c_{12} \left(\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d} \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} \mathcal{E}_{\kappa'}^{d, l-\epsilon} (\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) \right\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&= c_{12} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa\|_{L_q(I^d)}^{q^*} \right)^{1/q^*} \\
&\leq c_{12} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} \|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)}^{q^*} \right. \\
&\quad \times (2d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon} \cap L_q(I^d)))^{q^*} \left. \right)^{1/q^*} \\
&\leq c_{13} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (\|\mathcal{E}_\kappa^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)}) \right. \\
&\quad \times d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\epsilon} \cap L_q(I^d)))^{q^*} \left. \right)^{1/q^*}. \quad (3.3.15)
\end{aligned}$$

Заметим, что при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}$, в силу

(3.2.1), (1.4.11) справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& d_{n_\kappa}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon}, \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon} \cap L_q(I^d)) \\
&= d_{n_\kappa}((\mathfrak{I}_\kappa^{d,l-\epsilon})^{-1} \mathfrak{I}_\kappa^{d,l-\epsilon}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon}), \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon} \cap L_q(I^d)) \\
&\leq c_{14} 2^{-(\kappa, \epsilon)/q} d_{n_\kappa}(\mathfrak{I}_\kappa^{d,l-\epsilon}(B(L_p(I^d)) \cap \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon}), l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}}) \\
&\leq c_{14} 2^{-(\kappa, \epsilon)/q} d_{n_\kappa}(c_{15} 2^{(\kappa, \epsilon)/p} B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}}), l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}}) \\
&= c_{16} 2^{(\kappa, (1/p-1/q)\epsilon)} d_{n_\kappa}(B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}}), l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}}). \quad (3.3.16)
\end{aligned}$$

Поэтому, подставляя (3.3.16) и (3.3.4) при $q = p$ в (3.3.15), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}} (\mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon} f - \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon} f\|_{L_p(I^d)} g_\kappa) \right\|_{L_q(I^d)} \\
&\leq c_{17} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}} (2^{(\kappa, (p^{-1}-q^{-1})\epsilon)} \right. \\
&\times d_{n_\kappa}(B(l_p^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}}), l_q^{\mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}}) \Omega^{l_{\chi_f(\kappa)}}(f, c_4(2^{-\kappa})^f(\kappa)_{L_p(I^d)})^q)^{1/q^*}, f \in C. \quad (3.3.17)
\end{aligned}$$

Применение (3.3.2) ко второму слагаемому в правой части (3.3.14) дает оценку

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r+j_0} \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon} f \right\|_{L_q(I^d)} \\
&\leq c_{18} 2^{-(r+j_0) \mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1}-q^{-1}) + \epsilon)} (r+j_0)^{(\epsilon-1)(1/q^* - 1/\theta)_+}, f \in C. \quad (3.3.18)
\end{aligned}$$

Соединяя (3.3.14), (3.3.17), (3.3.18), получаем (3.3.12).

Причем, по построению, ввиду (3.3.11) соблюдается неравенство

$$\begin{aligned}
\dim M &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \dim \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0} \dim M_\kappa = \\
&\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \dim \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa \geq \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}} \dim \mathfrak{P}_\kappa^{d,l-\epsilon} \\
&+ \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}} \dim M_\kappa = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon} \\
&+ \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa \geq \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}} \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon}} \dim M_\kappa \leq \\
&\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d,l-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0} n_\kappa \leq n. \square
\end{aligned}$$

Теорема 3.3.3

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Пусть еще $J = \{j \in \{1, \dots, d\} : \alpha_j = \mathbf{m}(\alpha)\}$, $\mathbf{c} = \text{card } J$. Тогда для $C = \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ и $X = L_q(I^d)$ существуют константы $c_{19}(C, X) > 0$ и $c_{20}(C, X) > 0$ такие, что при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$d_n(C, X) \leq c_{19} \begin{cases} n^{-\mathbf{m}(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})_+ \mathbf{e})} (\log n)^{(\mathbf{m}(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})_+ \mathbf{e})+(1/q-1/\theta)_+)(\mathbf{c}-1)}, \\ \text{при } q \leq p \text{ или } (p < q \leq 2 \text{ и соблюдении условия (3.1.4))}; \\ n^{-\mathbf{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathbf{e})} (\log n)^{(\mathbf{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathbf{e})+(1/2-1/\theta)_+)(\mathbf{c}-1)}, \\ \text{при } q \geq \max(2, p) \text{ и выполнении условия} \\ \alpha - p^{-1} \mathbf{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathbf{e} > 0, \end{cases} \quad (3.3.19)$$

где $\mathbf{q} = \min(2, \max(p, q))$,

$$d_n(C, X) \geq c_{20} n^{-\mathbf{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathbf{e})} (\log n)^{(\mathbf{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathbf{e})+(1/2-1/\theta)_+)(\mathbf{c}-1)},$$

при $q \geq 2$ и выполнении условия (3.1.4). (3.3.19')

Доказательство.

В первом случае, когда $q \leq p$ или $(p < q \leq 2)$ и соблюдается условие (3.1.4), полагая $l = l(\alpha)$ и фиксируя вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, подчиненный условиям (3.3.1), для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ выберем число $r \in \mathbb{N}$ так, чтобы удовлетворить неравенству

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\mathbf{e}} \leq n < \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r+1} \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\mathbf{e}}, \quad (3.3.20)$$

и рассмотрим линейное подпространство $M \subset X$, определяемое равенством

$$M = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\mathbf{e}}.$$

Тогда, учитывая (3.3.20), размерность

$$\dim M = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \dim \mathfrak{P}_\kappa^{d, l-\mathbf{e}} = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\mathbf{e}} \leq n,$$

и для $f \in C$, благодаря (1.5.3), (3.3.2), соблюдается неравенство

$$\begin{aligned} \inf_{g \in M} \|f - g\|_{L_q(I^d)} &\leq \|f - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\mathbf{e}} f\|_{L_q(I^d)} \\ &= \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} \mathcal{E}_\kappa^{d, l-\mathbf{e}} f \right\|_{L_q(I^d)} \leq c_{21} 2^{-r \mathbf{m}(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})_+ \mathbf{e})} r^{(\mathbf{c}-1)(1/q-1/\theta)_+}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$d_n(C, X) \leq \sup_{f \in C} \inf_{g \in M} \|f - g\|_X \leq c_{21} 2^{-r} \mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathfrak{e})_r^{(\mathfrak{c}-1)(1/q-1/\theta)_+}. \quad (3.3.21)$$

Замечая, что вследствие (1.4.10), (1.2.2), (3.3.1) для $r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$c_{22}(d, l, \beta) 2^r r^{\mathfrak{c}-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\mathfrak{e}} \leq c_{23}(d, l, \beta) 2^r r^{\mathfrak{c}-1}, \quad (3.3.22)$$

из (3.3.21), (3.3.20) и (3.3.22) получаем (3.3.19) в первом случае.

Теперь рассмотрим второй случай, когда $q \geq \max(2, p)$ и выполняется условие $\alpha - p^{-1} \mathfrak{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathfrak{e} > 0$, которое влечет (3.1.4).

В этом случае, полагая $l = l(\alpha)$ и обозначая $J' = \{1, \dots, d\} \setminus J$, фиксируем вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, для которого выполняются условия (3.3.1) и для $j \in J'$ верно неравенство

$$\beta_j^{-1}(\alpha_j - p^{-1} - (1/2 - p^{-1})_+) > \mathfrak{m}(\alpha - p^{-1} \mathfrak{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathfrak{e}).$$

Далее, фиксируем $\epsilon > 0$ такое, что для $j \in J'$ соблюдается неравенство

$$\beta_j^{-1}(\alpha_j - p^{-1} - (1/2 - p^{-1})_+) > \mu + \epsilon, \quad \text{где } \mu = \mathfrak{m}(\alpha - p^{-1} \mathfrak{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathfrak{e}),$$

а также выберем $\gamma > 0$ и $\gamma' > 0$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} \gamma < 1/3, \mu - \gamma/2 > 0, \\ (1 + \frac{1}{3\gamma}) \mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathfrak{e}) &\geq \mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1} - 1/2)_+ \mathfrak{e}), \\ \gamma' < \gamma, \epsilon - \gamma'/2 > 0. \end{aligned}$$

Теперь для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$, подобрав $r \in \mathbb{N}$ так, чтобы удовлетворить неравенству

$$c_{20} 2^r r^{\mathfrak{c}-1} \leq n < c_{20} 2^{r+1} (r+1)^{\mathfrak{c}-1}, \quad (3.3.23)$$

где константа $c_{20} > 0$ будет указана ниже, положим число $j_0 = j_0(r) = \lfloor \frac{r}{3\gamma} \rfloor$ и зададим набор чисел $\{n_\kappa \in \mathbb{N} : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0\}$ равенством

$$n_\kappa = \min([c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}] + 1, \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\mathfrak{e}}),$$

для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j, j = 1, \dots, j_0$, где $c_0 = \max_{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, d\}} \mathfrak{R}_{\chi_{\mathcal{J}}}^{d, l-\epsilon}$ (см. (1.4.10)).

Тогда в силу (1.2.4) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0} n_{\kappa} &= \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} n_{\kappa} \\
&\leq \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} ([c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}] + 1) \\
&\leq \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} 2c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} \\
&\leq 2c_0 2^r \sum_{j=1}^{j_0} 2^{-\gamma j} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} 2^{-\gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} \\
&\leq c_{27} 2^r \sum_{j=1}^{j_0} 2^{-\gamma j} (r+j)^{\epsilon-1} \leq c_{27} 2^r r^{\epsilon-1} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\gamma j} (j+1)^{\epsilon-1} = c_{28} 2^r r^{\epsilon-1}.
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Из (3.3.22) и (3.3.24) вытекает, что для $r, j_0 \in \mathbb{N}, \{n_{\kappa} \in \mathbb{N} : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0\}$ соблюдается неравенство

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathfrak{R}_{\kappa}^{d, l-\epsilon} + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0} n_{\kappa} \leq c_{20} 2^r r^{\epsilon-1}, \tag{3.3.25}$$

где $c_{20} = c_{19} + c_{21}$. Тогда, сопоставляя (3.3.25), (3.3.23) с (3.3.11), в соответствии с леммой 3.3.2 построим подпространство $M \subset X$, размерность которого $\dim M \leq n$, а для $f \in C$ имеет место оценка (3.3.12). Из (3.3.12), пользуясь тем, что в силу (3.2.1), (1.4.10), (3.2.2) и (3.2.3) справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
d_{n_{\kappa}}(B(l_p^{\mathfrak{R}_{\kappa}^{d, l-\epsilon}}), l_q^{\mathfrak{R}_{\kappa}^{d, l-\epsilon}}) \\
\leq c_{22} 2^{(\kappa, (1/2-p^{-1})_+ \epsilon + q^{-1} \epsilon)} n_{\kappa}^{-1/2} (1 + \log \frac{\mathfrak{R}_{\kappa}^{d, l-\epsilon}}{n_{\kappa}})^{3/2}, \\
\text{при } \kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_{\kappa} < \mathfrak{R}_{\kappa}^{d, l-\epsilon}, \text{ (см. http://)}
\end{aligned}$$

получаем, что для $f \in C$ выполняется неравенство

$$\inf_{g \in M} \|f - g\|_X \leq c_{23} \left(\left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r + j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l - \epsilon}} (2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1} \mathfrak{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathfrak{e})} n_\kappa^{-1/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. (1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d, l - \epsilon}}{n_\kappa})^{3/2} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l \chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. + 2^{-(r + j_0) \mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathfrak{e})} (r + j_0)^{(\mathfrak{e} - 1)(1/2 - 1/\theta)_+} \right). \quad (3.3.26)$$

Оценим правую часть (3.3.26). Для этого заметим, что при $j = 1, \dots, j_0$ для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r + j - 1 < (\kappa, \beta) \leq r + j, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l - \epsilon}$, соблюдаются неравенства

$$\begin{aligned} (\kappa, \alpha - p^{-1} \mathfrak{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathfrak{e}) &= \sum_{i \in J} \beta_i^{-1} (\alpha_i - p^{-1} - (1/2 - p^{-1})_+) \beta_i \kappa_i \\ + \sum_{i \in J'} \beta_i^{-1} (\alpha_i - p^{-1} - (1/2 - p^{-1})_+) \beta_i \kappa_i &\geq \mathfrak{m}(\alpha - p^{-1} \mathfrak{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathfrak{e})(\kappa^J, \beta^J) \\ &\quad + (\mathfrak{m}(\alpha - p^{-1} \mathfrak{e} - (1/2 - p^{-1})_+ \mathfrak{e}) + \epsilon)(\kappa^{J'}, \beta^{J'}) \\ &= \mu(\kappa, \beta) + \epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'}) > \mu(r + j - 1) + \epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'}), \quad (3.3.27) \\ n_\kappa &= [c_0 2^{r - \gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}] + 1 \geq c_0 2^{r - \gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d, l - \epsilon}}{n_\kappa} &\leq \log \frac{c_0 2^{(\kappa, \epsilon)}}{c_0 2^{r - \gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}} \leq \log \frac{2^{(\kappa, \beta)}}{2^{r - \gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}} \\ &\leq \log \frac{2^{r + j}}{2^{r - \gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})}} = (\log 2)(j + \gamma j + \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})) \quad (\text{см. (1.4.10)}), \end{aligned}$$

и рассмотрим два случая. В первом случае, когда $\theta > 2$, используя неравенство Гельдера с показателем $\theta/2 > 1$, неравенства (3.3.8), (3.3.27),

(1.2.4), для $f \in C$ имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})_+ \epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \times \right. \\
& \quad \left. (1 + \log \frac{\mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}}{n_\kappa})^{3/2} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})_+ \epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \times \right. \\
& \quad \left. (1 + \log \frac{\mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}}{n_\kappa})^{3/2} \right)^{2\theta/(\theta-2)} 1/2-1/\theta \times \\
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \leq \\
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})_+ \epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \times \right. \\
& \quad \left. (1 + \log \frac{\mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}}{n_\kappa})^{3/2} \right)^{2\theta/(\theta-2)} 1/2-1/\theta \times \\
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \leq \\
& \leq c_{30} \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j, n_\kappa < \mathfrak{N}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{-\mu(r+j-1) - \epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} \times \right. \\
& \quad \left. (c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})})^{-1/2} (j + \gamma j + \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2} \right)^{2\theta/(\theta-2)} 1/2-1/\theta \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_{31} \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} (2^{-(\mu+1/2)r} 2^{-(\mu-\gamma/2)j} j^{3/2} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2} \right. \\
&\quad \times \left. 2^{-(\epsilon-\gamma'/2)(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} 2^{\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} \\
&= c_{31} 2^{-(\mu+1/2)r} \left(\sum_{j=1}^{j_0} (2^{-(\mu-\gamma/2)j} j^{3/2})^{2\theta/(\theta-2)} \right. \\
&\times \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} (2^{-(\epsilon-\gamma'/2)(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2})^{2\theta/(\theta-2)} \left. \right)^{1/2-1/\theta} \\
&\leq c_{32} 2^{-(\mu+1/2)r} \left(\sum_{j=1}^{j_0} (2^{-(\mu-\gamma/2)j} j^{3/2})^{2\theta/(\theta-2)} (r+j)^{\mathfrak{c}-1} \right)^{1/2-1/\theta} \\
&\leq c_{32} 2^{-(\mu+1/2)r} \left(\sum_{j=1}^{j_0} (2^{-(\mu-\gamma/2)j} j^{3/2})^{2\theta/(\theta-2)} r^{\mathfrak{c}-1} (1+j)^{\mathfrak{c}-1} \right)^{1/2-1/\theta} \\
&\leq c_{32} 2^{-(\mu+1/2)r} r^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{-(\mu-\gamma/2)j} j^{3/2})^{2\theta/(\theta-2)} (1+j)^{\mathfrak{c}-1} \right)^{1/2-1/\theta} \\
&= c_{33} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha-p^{-1}\mathfrak{e}-(1/2-p^{-1})_+ \mathfrak{e}+(1/2)\mathfrak{e})r} r^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)} \\
&= c_{33} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})r} r^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)} = c_{33} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})r} r^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)_+}.
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Во втором случае, когда $\theta \leq 2$, применяя неравенство Гельдера с

показателем $\theta/2 \leq 1$, а также (3.3.27), (3.3.8), для $f \in C$ получаем

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})_+ \epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \times \right. \\
& \quad \left. (1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}}{n_\kappa})^{3/2} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r < (\kappa, \beta) \leq r+j_0, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{-(\kappa, \alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})_+ \epsilon)} n_\kappa^{-1/2} \times \right. \\
& \quad \left. (1 + \log \frac{\mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}}{n_\kappa})^{3/2} \times \right. \\
& \quad \left. 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \leq \\
& \leq c_{34} \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j, n_\kappa < \mathfrak{R}_\kappa^{d, l-\epsilon}} (2^{-\mu(r+j-1) - \epsilon(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} \times \right. \\
& \quad \left. (c_0 2^{r-\gamma j - \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'})})^{-1/2} (j + \gamma j + \gamma'(\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \leq \\
& \leq c_{35} \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} (2^{-(\mu+1/2)r} 2^{-(\mu-\gamma/2)j} j^{3/2} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2} \right. \\
& \quad \times 2^{-(\epsilon-\gamma'/2)(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \Big)^{1/\theta} = \\
& = c_{35} 2^{-(\mu+1/2)r} \left(\sum_{j=1}^{j_0} (2^{-(\mu-\gamma/2)j} j^{3/2})^\theta \right. \\
& \quad \times \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} (2^{-(\epsilon-\gamma'/2)(\kappa^{J'}, \beta^{J'})} (1 + (\kappa^{J'}, \beta^{J'}))^{3/2} \\
& \quad \times 2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \Big)^{1/\theta} \leq \\
& c_{36} 2^{-(\mu+1/2)r} \left(\sum_{j=1}^{j_0} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : r+j-1 < (\kappa, \beta) \leq r+j} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \leq \\
& c_{36} 2^{-(\mu+1/2)r} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} (2^{(\kappa, \alpha)} \Omega^{l\chi_f(\kappa)}(f, c_4(2^{-\kappa})^{f(\kappa)})_{L_p(I^d)})^\theta \right)^{1/\theta} \leq \\
& c_{37} 2^{-(\mu+1/2)r} = c_{37} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha - p^{-1}\epsilon - (1/2-p^{-1})_+ \epsilon + (1/2)\epsilon)r} = c_{37} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon)r} \\
& = c_{37} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha - (p^{-1}-1/2)_+ \epsilon)r} 2^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)_+ r}. \quad (3.3.29)
\end{aligned}$$

Оценивая далее правую часть (3.3.26), выводим

$$\begin{aligned}
& 2^{-(r+j_0) \mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})_+ \mathfrak{e})} (r+j_0)^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)_+} \\
& \leq 2^{-(r+\lceil \frac{r}{3\gamma} \rceil) \mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})_+ \mathfrak{e})} (r+\lceil \frac{r}{3\gamma} \rceil)^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)_+} \\
& \leq 2^{-(r+\frac{r}{3\gamma}-1) \mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-q^{-1})_+ \mathfrak{e})} (r+\frac{r}{3\gamma})^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)_+} \\
& \leq c_{38} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})} r_{\mathcal{P}}^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)_+}. \quad (3.3.30)
\end{aligned}$$

Соединяя (3.3.26), (3.3.28), (3.3.29), (3.3.30) и учитывая, что $\dim M \leq n$, приходим к неравенству

$$d_n(C, X) \leq \sup_{f \in C} \inf_{g \in M} \|f - g\|_X \leq c_{39} 2^{-\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})} r_{\mathcal{P}}^{(\mathfrak{c}-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Отсюда и из (3.3.23) вытекает (3.3.19) во втором случае.

Для получения (3.3.19') заметим, что при $\alpha - (1/p - 1/2)_+ \mathfrak{e} > 0$ выполняется неравенство (см. [5])

$$\begin{aligned}
& d_n(B(S_{p,\theta}^\alpha B(I^d)), L_2(I^d)) \\
& \geq c_{40} n^{-\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})} (\log n)^{(\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})+(1/2-1/\theta)_+)(\mathfrak{c}-1)}, \\
& \text{где } B(S_{p,\theta}^\alpha B(I^d)) = B(L_p(I^d)) \cap (\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)).
\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь тем, что для $f \in L_q(I^d)$ при $q \geq 2$ соблюдается неравенство $\|f\|_{L_2(I^d)} \leq \|f\|_{L_q(I^d)}$, в силу (3.2.1) при $q \geq 2$ и $\alpha - (1/p - 1/q)_+ \mathfrak{e} > 0$ выводим

$$\begin{aligned}
& d_n(\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d), L_q(I^d)) \geq d_n(\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d), L_2(I^d)) \geq d_n(B(S_{p,\theta}^\alpha B(I^d)), L_2(I^d)) \\
& \geq c_{40} n^{-\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})} (\log n)^{(\mathfrak{m}(\alpha-(p^{-1}-1/2)_+ \mathfrak{e})+(1/2-1/\theta)_+)(\mathfrak{c}-1)},
\end{aligned}$$

что совпадает с (3.3.19'). \square

Список литературы

- [1] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР, 178 (1986), 3–113.
- [2] Галеев Э. М. Поперечники классов Бесова $B_{p,\theta}^r(T^d)$ // Матем. заметки, 69:5 (2001), 656–665.
- [3] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука. 1977.
- [4] Бесов О. В. Теорема Литтлвуда-Пэли для смешанной нормы // Тр. МИАН СССР, 170 (1984), 31–36.
- [5] Кудрявцев С. Н. Обобщенные ряды Хаара и их применение // Analysis Mathematica, 37:2 (2011), 103 – 150.
- [6] Галеев Э. М. Порядковые оценки производных периодического многомерного А-ядра Дирихле в смешанной норме // Матем. сб., 117(159):1 (1982), 132–43. гт
- [7] Кудрявцев С. Н. Приближение производных функций конечной гладкости из неизотропных классов // Изв. РАН. Сер. матем. 68:1 (2004), 79 – 122.
- [8] Кудрявцев С. Н. Приближение и восстановление производных для функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гельдера // Изв. РАН. Сер. матем. 71:5 (2007), 37 – 80.
- [9] Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций // М.: Мир, 1973.
- [10] Никольский С. М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сибирский математический журнал. 4:6 (1963), 1342 – 1364.
- [11] Аманов Т. И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной // Издательство "Наука" КазССР. Алма-Ата. 1976.
- [12] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближения // М.: Изд-во МГУ. 1976.
- [13] Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 41:2 (1977), 334 – 351.